高等工业专科学校试用教材

高等数学

下册

江苏省《高等数学》编写组

江苏教育出版社

封面设计　徐凤嘐

书　号：7351·224

定　价：　1.60元

高等工业专科学校试用教材

高 等 数 学

下 册

江苏省《高等数学》编写组

江 苏 教 育 出 版 社

高等工业专科学校试用教材

高　等　数　学

下　　册

江苏省《高等数学》编写组

江苏教育出版社出版

江苏省新华书店发行　　靖江印刷厂印刷

开本787×1092毫米1/32　印张9.5　字数200,000

1985年10月第1版　　1985年10月第1次印刷

印数1—13000册

书号：7351·224　　定价：1.60元

责任编辑　王建军

前　言

为了适应高等工业专科学校数学教学的需要，大力提高教学质量，改变专科借用本科教材的现状，我们在江苏省高教局的组织领导下，在有关学校的支持下，编写了这本教材，供高等工业专科学校、职业大学各专业使用；也可供要求相近的大学本科、专科、职工大学、业余大学、干部训练班等作为选用教材；还可供具有高中文化水平有志于自学成才的同志选用。

本书在内容选择、结构体系和应用举例诸方面都努力体现专科特色，力求贯彻少而精的原则。教材比较注重学生基本运算能力的训练和运算方法上的归纳与指导；同时还尽可能注意理论与实际的联系以及能力的培养。

本教材实际授课时数为160学时左右，分上、下两册出版。上册包括一元函数微积分和微分方程，下册包括向量代数与空间解析几何、多元函数微积分和无穷级数，每节配有习题，各章有复习题，书末附有答案。书中*号内容可供不同专业取舍。

参加本书编写工作的有（以姓氏笔划为序）：王清俊（连云港化学矿业专科学校），江天学（常州工业技术学院），庄海宜（南通纺织工学院），张茂康（扬州工业专科学校），张谭生（南通纺织工学院），吴敬溧（连云港化学矿业专科学校），汪瑶同（扬州工业专科学校），杨慧琍、柴伯琪（无锡大学），黄绍贤（扬州工业专科学校），常柏林（盐城工业专科学校），

彭玉芳（常州工业技术学院）。汪瑶同、庄海宜、杨慧琍等同志对稿件作了进一步修改，最后由汪瑶同定稿。

全国工科教材编审委员会编委、南京工学院陶永德副教授审阅了本书全稿，提出了不少改进意见，对完成本教材起了重要的指导作用，对此我们表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，敬请读者批评指正，以便再版时修改。

江苏省《高等数学》编写组

一九八五年六月

目 录

第七章 向量代数与空间解析几何……………………（1）

第一节 空间直角坐标系与向量……………………（1）

一、空间直角坐标系（1） 二、向量及其线性运算（3） 三、向量的坐标表示（6） 习题7—1（8）

第二节 数量积与向量积……………………（8）

一、两向量的数量积（8） 二、两向量的向量积（13） 习题7—2（17）

第三节 平面的方程……………………（18）

一、平面的点法式方程（18） 二、平面的一般式方程（20） 习题7—3（23）

第四节 空间直线的方程……………………（23）

一、直线的一般式方程（23） 二、直线的标准方程（24） 三、直线的参数方程（26） 习题7—4（27）

第五节 曲面方程……………………（28）

一、曲面方程的概念（28） 二、旋转曲面（29） 三、柱面（31） 习题7—5（33）

第六节 空间曲线的方程……………………（34）

一、空间曲线的一般方程（34） 二、空间曲线的参数方程（35） 三、空间曲线在坐标面

上的投影（36）　习题7—6（38）
第七节　二次曲面……………………………………（39）
一、椭球面（39）　二、抛物面（41）　三、双曲面（42）　习题7—7（44）　复习题七（44）
第八章　多元函数微分法及其应用……………………（47）
第一节　多元函数的概念…………………………（47）
一、二元函数的定义（47）　二、二元函数的几何意义（50）　习题8—1（51）
第二节　二元函数的极限与连续性………………（52）
一、二元函数的极限（52）　二、二元函数的连续性（54）　习题8—2（57）
第三节　偏导数与全微分……………………………（57）
一、偏导数的定义（57）　二、二阶偏导数（63）
习题8—3（1）（65）　三、全微分（66）
习题8—3(2)（72）
第四节　多元函数微分法…………………………（73）
一、复合函数微分法（73）　习题8—4(1)（81）　二、隐函数微分法（82）　习题8—4(2)（84）
第五节　多元函数微分法的应用…………………（85）
一、偏导数的几何应用（85）　习题8—5(1)（90）
二、二元函数的极值及其求法（91）习题8—5(2)（97）　复习题八（97）
第九章　重积分……………………………………（101）
第一节　二重积分的概念及其性质………………（101）
一、两个实例（101）　二、二重积分的定义（104）
三、二重积分的性质（106）　习题9—1（109）

第二节　二重积分的计算法…………………………（109）

一、在直角坐标系中的计算法（110）　二、在极坐标系中的计算法（119）　习题9—2（123）

第三节　二重积分的应用举例……………………（126）

一、几何应用举例（127）　二、物理应用举例（132）　习题9—3（139）

第四节　三重积分的概念及计算法………………（140）

一、三重积分的概念（140）　二、三重积分的计算法（142）　习题9—4（155）　复习题九（157）

第十章　曲线积分与曲面积分……………………（160）

第一节　对弧长的曲线积分…………………………（160）

一、对弧长的曲线积分的概念（160）　二、对弧长的曲线积分的性质（162）　三、对弧长的曲线积分的计算法（163）　习题10—1（166）

第二节　对坐标的曲线积分…………………………（167）

一、对坐标的曲线积分的概念（167）　二、对坐标的曲线积分的性质（170）　三、对坐标的曲线积分的计算法（171）　习题10—2（175）

第三节　格林公式……………………………………（177）

一、格林公式（177）　二、曲线积分与路径无关的条件（180）　习题10—3（183）

*第四节　曲面积分……………………………………（184）

一、对面积的曲面积分（184）　二、对坐标的曲面积分（190）　三、高斯公式（202）　*习题10—4（203）　复习题十(205)

第十一章　无穷级数………………………………（209）

第一节　无穷级数的敛散性………………………（209）
一、无穷级数及其敛散性（209）　二、无穷级数的基本性质（212）　三、级数收敛的必要条件（213）　习题11—1（215）
第二节　常数项级数的审敛法……………………（216）
一、正项级数的审敛法（216）　二、交错级数的审敛法（221）　三、绝对收敛与条件收敛（223）习题11—2（224）
第三节　幂级数……………………………………（225）
一、函数项级数的一般概念（225）　二、幂级数及其收敛性（226）　三、幂级数的运算（231）习题11—3（234）
第四节　函数展开为幂级数………………………（235）
一、泰勒公式（235）　二、泰勒级数（237）
三、把函数展开成幂级数（239）　习题11—4（245）
*第五节　傅立叶级数…………………………………（246）
一、周期为2π的函数的傅立叶级数（246）　二、定义在[－π，π]或[0，π]上的函数的傅立叶级数（257）三、周期为2l的函数的傅立叶级数（263）
*习题11—5（269）　复习题十一（270）
习题答案…………………………………………………（274）

第七章　向量代数与空间解析几何

空间解析几何是用代数方法来研究空间几何问题的，本章在建立空间直角坐标系后，将介绍向量及其运算，并以向量为工具来讨论空间的平面和直线，最后介绍空间的曲面和曲线的方程。

第一节　空间直角坐标系与向量

一、空间直角坐标系

过空间一个定点O作三条相互垂直的数轴Ox、Oy、Oz，这就建立了一个空间直角坐标系.定点O称为**坐标原点**，三条数轴称为**坐标轴**，分别为x轴、y轴、z轴，各坐标轴的顺序和正向可按右手法则规定如下：以右手握住z轴，让右手的四指从x轴正向以$\frac{\pi}{2}$角度转向y轴正向时，大姆指所指方向就是z轴正向。每两条坐标轴可以确定一个平面，这样的平面共有三个，统称为**坐标平面**，顺次为xy面、yz面、zx面，其中xy面是由x轴与y轴确定的，其余类同. 这三个平面相互垂直，且把空间分成八个部分，每一部分称为一个**卦限**，含有正向x轴、正向y轴和正向z轴的那个卦限称为**第一卦限**(图7—1)。

设P为空间的一点（图7—2），过点P作垂直于三坐标轴

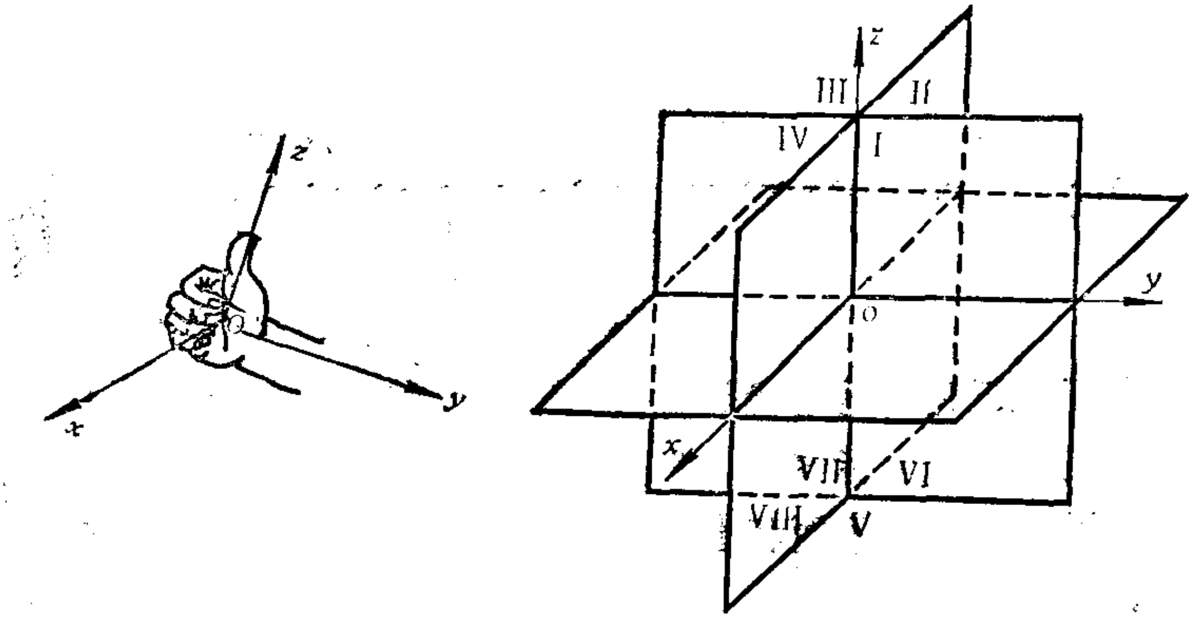


图 7—1

的平面，与三坐标轴分别相交于A、B、C三点，设这三点在x轴、y轴、z轴上的坐标顺次为x、y、z，于是空间的一点P唯一地确定了一个有序数组（x，y，z）。反之，已知一个有序数组（x，y，z），在空间必有唯一确定的一点与它对应，因此空间的所有点与全体有序数组（x，y，z）之间建立了一一对应的关系。

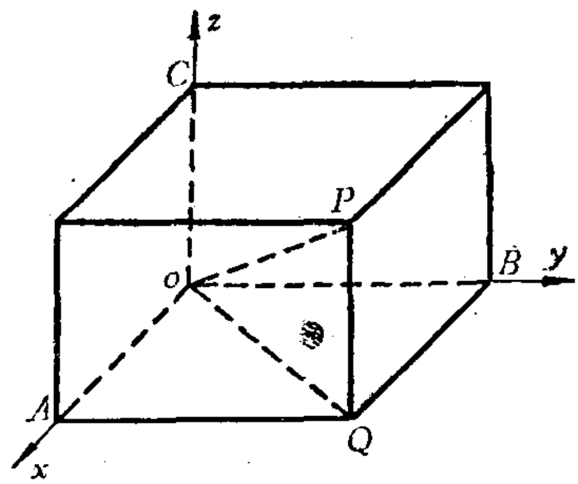


图 7—2

这组数（x，y，z）就**称为点P的坐标**，记为P（x，y，z）。其中x称为**横坐标**，y称为**纵坐标**，z称为**竖坐标**。

显然，原点O的坐标为（0，0，0）；在x轴上的点，$y=z=0$；在y轴上的点，$z=x=0$；在z轴上的点，$x=y=0$；在yz面上的点，$x=0$；在zx

面上的点，$y=0$；在xy面上的点，$z=0$。

从图7—2可以看出

$$|OQ|^2=|OA|^2+|AQ|^2=|OA|^2+|OB|^2=x^2+y^2,$$

$$|OP|^2=|OQ|^2+|QP|^2=|OQ|^2+|OC|^2=x^2+y^2+z^2,$$

所以，点$P(x, y, z)$与原点$O(0,0,0)$的距离是

$$|OP|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

二、向量及其线性运算

1.向量的概念

在一些物理量中，如力、位移、速度等，它们除有大小外还有方向，这种既有大小又有方向的量称为**向量**.

我们用有向线段$\overrightarrow{OP}$来表示向量（图7—3），其中O、P分别为向量$\overrightarrow{OP}$的起点和终点，线段的长度$|OP|$表示向量$\overrightarrow{OP}$的大小．也可用粗体字母$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、…表示向量。

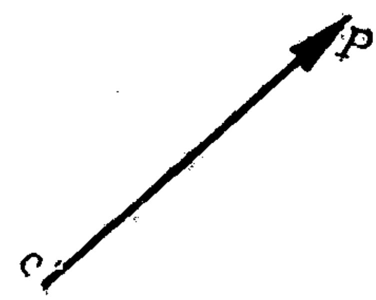


图 7—3

对于向量，我们只考虑其大小和方向，不考虑其起点，向量可以平行地自由移动（称为**自由向量**）。因此，如果两向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$的大小相等，方向相同，就称它们是**相等的**，记作$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$。

向量的大小称为**向量的模**，向量$\boldsymbol{a}$的模记作$|\boldsymbol{a}|$。模等于1的向量称为**单位向量**，模等于零的向量称为**零向量**，记作$\boldsymbol{0}$，零向量的方向不定。

2. 向量的加减法

设有两个非零向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，平移$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$使起点重合，并以$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$为边作平行四边形（如图7—4所示），那么，以$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$的起点为起点的对角线所表示的向量定义为**两向量之和**，记作$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，这就是向量加法的**平行四边形法则**。由于向量$\boldsymbol{b}$的起点可以平行移动到$\boldsymbol{a}$的终点，因而向量的加法也可理解为：以向量$\boldsymbol{a}$的终点为向量$\boldsymbol{b}$的起点作向量$\boldsymbol{b}$，然后作出由$\boldsymbol{a}$的起点到$\boldsymbol{b}$的终点的向量，即为$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，这是向量加法的**三角形法则**，这个法则可以推广到求任意有限个向量的和。

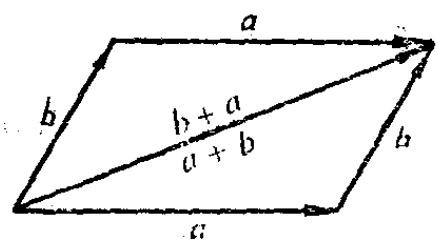


图 7—4

从图7—4、7—5可以看出：向量的加法满足交换律和结合律，即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a};$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

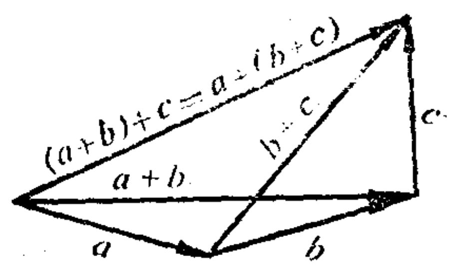


图 7—5

向量的减法，可以看作向量加法的逆运算。规定：若$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$，则$\boldsymbol{c}$称为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的差，记作$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$（图7—6）.

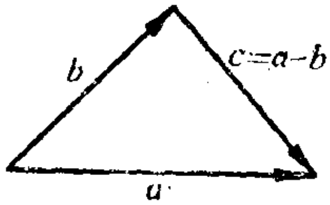


图 7—6

与已知向量$\boldsymbol{a}$的模相等而方向相反的向量称为$\boldsymbol{a}$的**负向量**，记作$-\boldsymbol{a}$。应用负向量的概念，可以把向量的减法变成向量的加法来运算，即

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$（图7—7）.

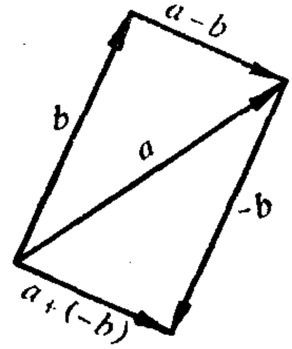


图 7—7

3.数乘向量

定义 向量$\boldsymbol{a}$与数量λ的乘积$\lambda\boldsymbol{a}$仍是一个向量，$\lambda\boldsymbol{a}$的模是$|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$。当$\lambda>0$时，$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$的方向相同；当$\lambda<0$时，$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$的方向相反。

$\lambda=0$时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；$\lambda=1$时，$1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$；$\lambda=-1$时，$(-1)\cdot\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

数乘向量满足结合律与分配律，即

$$\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\mu\lambda)\boldsymbol{a},$$
$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b},$$
$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a},$$

其中λ、μ都是数量.

设$\boldsymbol{a}$为非零向量，令$\lambda=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}$，于是$\lambda\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$的模等于1，故$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$是一个与$\boldsymbol{a}$同向的单位向量，记作$\boldsymbol{a}^{\circ}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，因此$\boldsymbol{a}$可以表示为

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^{\circ}.$$

这将给以后的向量运算带来很大方便．例如，设$\boldsymbol{i}$是与x轴同向的单位向量，$\overrightarrow{OA}$是x轴上的一个向量，点A的坐标为x，则不论$\overrightarrow{OA}$的方向是否与x轴同向，都有

$$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i},$$

且当$x>0$时，$\overrightarrow{OA}$与x轴的方向相同；当$x<0$时，$\overrightarrow{OA}$与x轴的方向相反。

三、向量的坐标表示

上面从几何角度介绍了向量及其运算，但是有些问题仅靠几何方法是很难解决的. 现在用代数方法来讨论向量及其运算.

在空间直角坐标系中，沿 x 轴、y 轴、z 轴的方向分别取单位向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，称为**基本单位向量**.

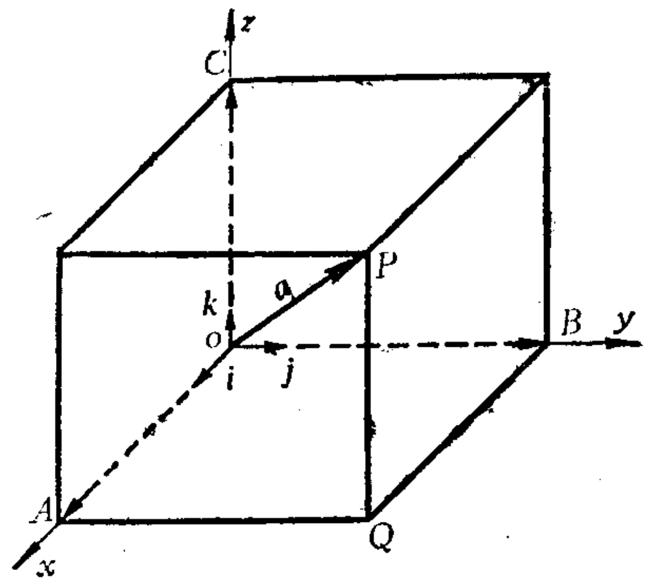


图 7—8

设向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点在坐标原点 O（图7—8），过 $\boldsymbol{a}$ 的终点 $P(x, y, z)$ 作三个平面，分别垂直于三条坐标轴，并顺次交于点 A、B、C. 因 $\overrightarrow{OA}$ 在 x 轴上，点 A 的坐标是 x，故有 $\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}$，同理有 $\overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k}$，从而有

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

上式称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**坐标表示式**，简记为

$$\boldsymbol{a}=\{x, y, z\}.$$

x、y、z 也称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**坐标**，而 (x, y, z) 恰是向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点 P 的坐标. 向量 $x\boldsymbol{i}$、$y\boldsymbol{j}$、$z\boldsymbol{k}$ 分别叫做 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的**分向量**. 显然，零向量的三个坐标全为零，即 $\boldsymbol{0}=\{0, 0, 0\}$，基本单位向量的坐标分别为：$\boldsymbol{i}=\{1, 0, 0\}$，

$\boldsymbol{j}=\{0,1,0\}$，$\boldsymbol{k}=\{0,0,1\}$。

例1 已知$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$是以$A(x_1,y_1,z_1)$为起点，$B(x_2,y_2,z_2)$为终点的向量（图7—9），求向量$\boldsymbol{a}$的坐标。

解
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{a}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$。

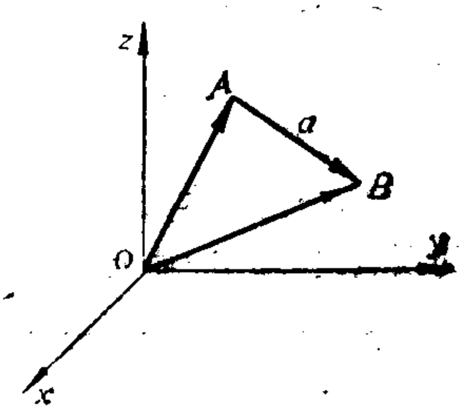


图 7—9

由此可知，起点不在坐标原点的向量的坐标，恰好等于向量终点坐标与起点坐标之差。

利用向量的坐标表示式、向量加法的交换律与结合律，以及数乘向量的结合律与分配律，可进行如下运算：

设$\boldsymbol{a}=\{a_x,\ a_y,\ a_z\}$，　　$\boldsymbol{b}=\{b_x,\ b_y,\ b_z\}$，

即 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，　　$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，

则
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\pm(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x\pm b_x)\boldsymbol{i}+(a_y\pm b_y)\boldsymbol{j}+(a_z\pm b_z)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda\boldsymbol{a}&=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\\&=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$　　（λ为数量）

或记为

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\{a_x\pm b_x,\ a_y\pm b_y,\ a_z\pm b_z\},$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_x,\ \lambda a_y,\ \lambda a_z\}.$$

由此可见，对向量的运算可以转化为普通的代数运算。

例2 已知$\boldsymbol{a}=\{1,-2,3\}$，$\boldsymbol{b}=\{1,5,-4\}$，

求 $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$。

解 因 $2\boldsymbol{a}=\{2,\ -4,\ 6\}$，$3\boldsymbol{b}=\{3,15,-12\}$，

所以

$$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=\{2-3,\ -4-15,\ 6-(-12)\}$$
$$=\{-1,\ -19,\ 18\}.$$

习 题 7—1

1. 在空间直角坐标系中，定出点$A(3,1,2)$与$B(2,-1,3)$的位置．并求出它们关于（1）各坐标面；（2）各坐标轴；（3）原点的对称点的坐标．

2. 一立方体放置在xy平面上，其底面的中心与原点相合，底面的顶点在x轴和y轴上．已知立方体的边长为a，求其它各顶点的坐标．

3. 已知平行四边形$ABCD$，设$\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$，$\overrightarrow{AD}=\mathbf{b}$，试用$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$表示向量$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$和$\overrightarrow{MD}$，这里$M$是平行四边形对角线的交点．

4. 已知向量$\mathbf{a}=\{3,\ 5,\ -1\}$，$\mathbf{b}=\{2,\ 2,\ 2\}$，$\mathbf{c}=\{4,\ -1,\ -3\}$，求（1）$2\mathbf{a}-3\mathbf{b}+4\mathbf{c}$；（2）$m\mathbf{a}+n\mathbf{b}$（$m$、$n$是常数）．

5. 设向量$\mathbf{a}=\{3,\ 2,\ 1\}$，$\mathbf{b}=\{1,\ -1,2\}$，$\mathbf{c}=(x,y,z\}$，问当x、y、z分别取什么值时，等式$3\mathbf{a}-5\mathbf{b}+2\mathbf{c}=\mathbf{0}$才能成立？

第二节 数量积与向量积

一、两向量的数量积

首先，我们来建立空间两向量的夹角的概念．设在空间有两向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，交于点M（图7—10）．在两向量所决定的平面上，从一向量的正向到另一向量的正向所需旋转的角度为θ（限定

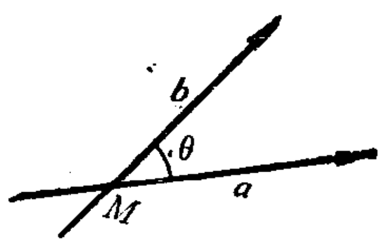


图 7—10

θ在0与π之间），称为**两向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的夹角**，记作（$\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}$）或（$\widehat{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}}$）.若$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$不相交，可将其中一向量平行移动，使它们相交。

1.数量积的定义

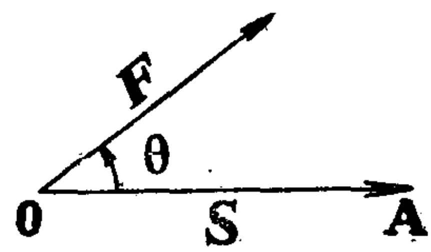


图 7—11

设有一质点在力$\boldsymbol{F}$作用下自O点移到A点(图7—11)，位移$\boldsymbol{S}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{F}$与$\boldsymbol{S}$的夹角为$\theta$，由力学知识可知，力$\boldsymbol{F}$所作的功为

$$W=|\boldsymbol{F}|\cdot|\boldsymbol{S}|\cos\theta.$$

功W是数量，它由力$\boldsymbol{F}$和位移$\boldsymbol{S}$的模及夹角θ唯一地确定。在数学上，我们就称功W为力$\boldsymbol{F}$与位移$\boldsymbol{S}$的数量积。

定义 两个非零向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$的模及其夹角θ（$0\leqslant\theta\leqslant\pi$)的余弦的乘积，称为两向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$的**数量积**，记作$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta\ (0\leqslant\theta\leqslant\pi). \tag{1}$$

若$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$中有一个是零向量，则规定数量积为零。

容易证明，数量积有下列运算规律：

(1)交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

(2)结合律 $\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$，$\lambda$为一数量；

(3)分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

由数量积的定义可知

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}})=|\boldsymbol{a}|^2,$$

即 $$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2.$$

因而有

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1.$$

定理 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 相互垂直的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$。

证 若$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$相互垂直，则 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\cos\theta=0$，于是

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta=0;$$

反之，若$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，由于$|\boldsymbol{a}|\neq 0$，$|\boldsymbol{b}|\neq 0$，所以 $\cos\theta=0$，则 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，即$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$相互垂直。

这个定理很重要，以后经常用到。并由此可知

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0.$$

2.**数量积的坐标表示式**

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，利用数量积的运算规律有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}\\&\quad+a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

于是

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{2}$$

即两向量的数量积等于它们对应坐标的乘积之和。

作为特例 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$， (3)

即向量的模等于它的坐标平方之和的平方根。

例1 已知两点$A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$，求A与B之间的距离。

解 因为$\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\}$，

而

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$

由于A、B之间的距离 $d=|\overrightarrow{AB}|$，所以

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}, \qquad (4)$$

这就是**两点间的距离公式**。

例 2 已知$\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{k}$，求与$\boldsymbol{a}$同向的单位向量$\boldsymbol{a}^{\circ}$。

解 $\boldsymbol{a}^{\circ}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}=\dfrac{1}{\sqrt{4^2+0^2+(-3)^2}}(4\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{k})$

$$=\frac{4}{5}\boldsymbol{i}-\frac{3}{5}\boldsymbol{k}.$$

例 3 试证$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$与$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$相互垂直。

证 因为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3\times1+0\times(-2)+1\times(-3)=0$，据两向量垂直的充要条件，可知$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$相互垂直。

3.**两向量的夹角公式**

设$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，

由$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，可得两向量的夹角余弦的计算公式为

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}$$

$$=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \qquad (5)$$

向量$\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$与各坐标轴之间的夹角$\alpha$、$\beta$、$\gamma$（图7—12）称为向量$\boldsymbol{a}$的**方向角**。它们的余弦$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$称为向量$\boldsymbol{a}$的**方向余弦**。

由公式(5)可知

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \cos(\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{i}}) \\ &= \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}, \\ \cos\beta &= \cos(\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{j}}) \\ &= \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}, \\ \cos\gamma &= \cos(\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{k}}) \\ &= \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.\end{aligned}\right\}(6)$$

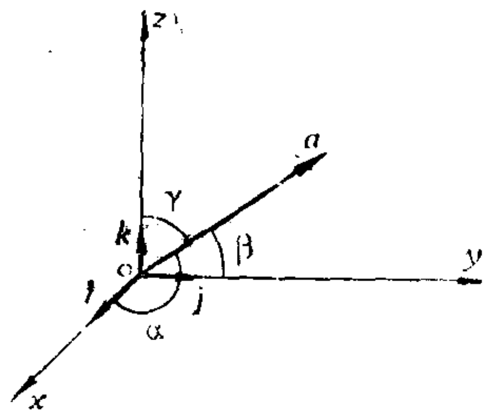


图 7—12

显然，任一向量的方向余弦的平方和等于1，即

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

$\boldsymbol{a}$是单位向量时，它的坐标正是它的方向余弦，即

$$a_x=\cos\alpha,\ a_y=\cos\beta,\ a_z=\cos\gamma.$$

例 4 已知三点$M_1(1,\ 1,\ 1)$、$M_2(1,\ 2,\ 2)$和$M_3(2,\ 1,\ 2)$，试计算向量$\overrightarrow{M_1M_2}$与$\overrightarrow{M_1M_3}$的夹角θ。

解 因为$\overrightarrow{M_1M_2}=\{0,\ 1,\ 1\}$，$\overrightarrow{M_1M_3}=\{1,\ 0,\ 1\}$，

$$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{M_1M_3}=0\times1+1\times0+1\times1=1,$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{0^2+1^2+1^2}=\sqrt{2},$$

$$|\overrightarrow{M_1M_3}|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2},$$

所以

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{M_1M_3}}{|\overrightarrow{M_1M_2}|\cdot|\overrightarrow{M_1M_3}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2},$$

于是，$\overrightarrow{M_1M_2}$与$\overrightarrow{M_1M_3}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$。

二、两向量的向量积

1.向量积的定义

设有一刚体，其上固定一点O，有一力$\boldsymbol{F}$作用于刚体上某一点P，现在来计算力$\boldsymbol{F}$对于O点的力矩$\boldsymbol{M}$。

设$\overrightarrow{OP}$与$\boldsymbol{F}$的夹角为θ（图7—13）由力学知识可知力矩的大小为

$$|\boldsymbol{M}|=|\overrightarrow{OP}|\cdot|\boldsymbol{F}|\sin\theta,$$

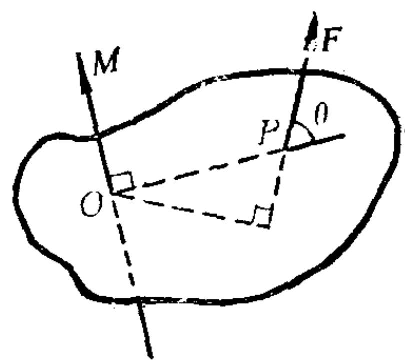


图 7—13

其方向垂直于$\overrightarrow{OP}$与$\boldsymbol{F}$所在的平面，且当右手从$\overrightarrow{OP}$以$\frac{\pi}{2}$角度到$\boldsymbol{F}$方向握拳时，大姆指伸直所指的方向即为$\boldsymbol{M}$的方向。在数学上，我们称力矩$\boldsymbol{M}$为向量$\overrightarrow{OP}$与$\boldsymbol{F}$的向量积。

定义　设两向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$的夹角为θ（$0\leqslant\theta\leqslant\pi$），若向量$\boldsymbol{c}$满足：

（1）　$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\theta$；

（2）　$\boldsymbol{c}$的方向垂直于$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$所在的平面（即$\boldsymbol{c}$既垂直于$\boldsymbol{a}$，又垂直于$\boldsymbol{b}$），且按从$\boldsymbol{a}$到$\boldsymbol{b}$的右手法则来确定。

则称$\boldsymbol{c}$为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的**向量积**，记作$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，

即
$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

若$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$中有零向量，或$\theta=0$、π时，则规定$\boldsymbol{c}$是零向量。

由定义可知，$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$等于以$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$为邻边的平行四边形的面积。

易知

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\ ,\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\ .$$

向量积有下列运算规律：

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$，这说明向量积不满足交换律。这是应该注意的；

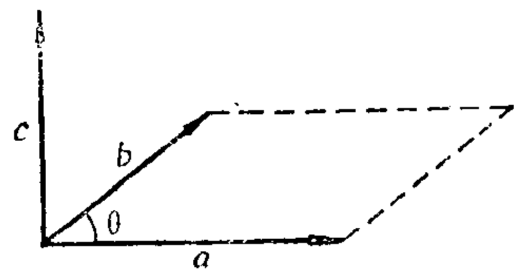


图 7—14

(2) 结合律

$$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$
$$=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$$

(λ为数量)；

(3) 分配律 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$,

证明从略。

由向量积的定义有

定理 两个非零向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$相互平行的充分必要条件是$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$。

证 若$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行，于是$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$或$\pi$，

$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$，所以

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}.$$

反之，若$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$，由于$|\boldsymbol{a}|\neq 0$，$|\boldsymbol{b}|\neq 0$，必有$\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$，于是$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$或$\pi$，即$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行。

由定理可知

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}.$$

2.向量积的坐标表示式

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$,

利用向量积的运算规律有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}+a_yb_x\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}\\&\quad+a_yb_y\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}+a_yb_z\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}+a_zb_x\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}\\&\quad+a_zb_z\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}\\&=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}\\&\quad+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k},\end{aligned}\tag{7}$$

借助于行列式记号，上式可表示为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}.$$

从公式(7)可知，两非零向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$相互平行的充要条件又可表示为

$$a_yb_z-a_zb_y=0,\quad a_zb_x-a_xb_z=0,\quad a_xb_y-a_yb_x=0,\tag{8}$$

或

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}\qquad(\text{设}b_x,\ b_y,\ b_z\text{全不为零}).$$

例 5 设$\boldsymbol{a}=\{2,\ 3,\ -1\}$，$\boldsymbol{b}=\{1,\ 2,\ 3\}$，求$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

解

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&3&-1\\1&2&3\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}3&-1\\2&3\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}2&-1\\1&3\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}\\&=11\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

例 6 求垂直于$\boldsymbol{a}=\{2,\ 2,\ 1\}$和$\boldsymbol{b}=\{4,\ 5,\ 3\}$的单位向量.

解 由向量积的定义，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$都垂直，

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 2 & 1\\ 4 & 5 & 3\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$

而

$$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3,$$

故 $\boldsymbol{c}^\circ=\dfrac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}=\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})$ 是与 a、b 都垂直的单位向量．又因为 $-\boldsymbol{c}^\circ=-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{i}+\dfrac{2}{3}\boldsymbol{j}-\dfrac{2}{3}\boldsymbol{k}$也与$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$都垂直，故所求的单位向量为$\left\{\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right\}$或$\left\{-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}\right\}$．

例 7 试证$\boldsymbol{a}=\{1,\ -5,\ 3\}$与$\boldsymbol{b}=\{2,-10,\ 6\}$相互平行．

证 由于$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的对应坐标成比例：

$$\frac{1}{2}=\frac{-5}{-10}=\frac{3}{6},$$

按两向量平行的充要条件可知$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行．

例 8 求以$A(1,\ 2,\ 3)$、$B(2,\ 0,\ 4)$、$C(2,\ -1,\ 3)$为顶点的三角形面积．

解 由向量积的定义可知，三角形面积为

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|,$$

而

$$\overrightarrow{AB}=\{1,\ -2,\ 1\},\ \overrightarrow{AC}=\{1,\ -3,\ 0\},$$

于是

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

$$=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},$$

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{3^2+1^2+(-1)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{11},$$

故所求三角形面积为$\frac{1}{2}\sqrt{11}$。

习　题　7—2

1．已知$\mathbf{a}=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$，$\mathbf{b}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$，求：

（1）$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$；　　　　（2）$(5\mathbf{a})\cdot(-3\mathbf{b})$．

2．已知两向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为$\frac{2}{3}\pi$，$|\mathbf{a}|=3$，$|\mathbf{b}|=4$，试计算：

（1）$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$；（2）$\mathbf{a}^2$；（3）$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2$；　（4）$(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2$．

3．已知$A(-1,2,3)$，$B(1,1,1)$和$C(0,0,5)$，试证明三角形ABC是直角三角形，并求角B．

4．一动点与点$P(1,1,1)$联成向量，此向量与$\mathbf{n}=\{2,2,3\}$垂直，求动点的轨迹．

5．设$\mathbf{a}=m\mathbf{i}+3\mathbf{j}+(n-1)\mathbf{k}$，$\mathbf{b}=3\mathbf{i}+l\mathbf{j}+3\mathbf{k}$，求$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$的模及方向余弦，并求出使$\mathbf{a}=\mathbf{b}$的$m$、$n$、$l$的值．

6．设向量的方向角为α、β、γ，若

（1）$\alpha=60°$，$\beta=120°$，求γ；

（2）$\alpha=135°$，$\beta=60°$，求γ．

7．设$\mathbf{a}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$，$\mathbf{b}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$，求：

（1）$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$；　　　　（2）$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-\mathbf{b})$．

8．已知$|\mathbf{a}|=10$，$\mathbf{b}=3\mathbf{i}-\mathbf{j}+\sqrt{15}\mathbf{k}$，又知$\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$平行，求$\mathbf{a}$．

9．已知$A(1,-1,2)$、$B(3,3,1)$和$C(3,1,3)$，求与$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$同时垂直的单位向量．

10．已知三角形的三个顶点为$A(3,4,1)$、$B(2,3,0)$，$C(3,5,1)$，试求其面积．

第三节　平面的方程

常见的最简单的空间图形是平面与直线。下面我们先研究平面的方程。

一、平面的点法式方程

已知平面过定点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，$\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$（A、B、C不同时为零）是与平面垂直的任意非零向量（称为**平面的法向量**）。设$M(x,y,z)$为平面内任意一点（图7—15），于是

$$\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}.$$

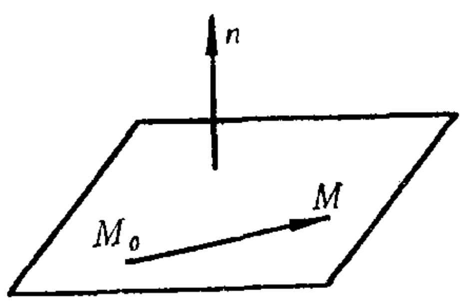


图　7—15

由于平面上任何一个向量都与$\boldsymbol{n}$垂直，因此

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0,$$

将此式写成坐标形式，就得到点M应满足的方程：

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (1)$$

显然，（1）式对于平面上所有的点都成立，而对于不在平面上的点均不成立，所以（1）式就是过已知点M_0且以$\boldsymbol{n}$为法向量的平面方程，称为**平面的点法式方程**。

例 1　求过点(1，1，1)且垂直于向量 $\boldsymbol{n}=\{2,2,3\}$ 的平面方程。

解　$\boldsymbol{n}$ 就是这个平面的法向量，由(1)式得此平面的方程为

$$2(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0,$$

即

$$2x+2y+3z-7=0.$$

例 2　求经过三点 $A(a,0,0)$、$B(0,b,0)$ 和 $C(0,0,c)$ 的平面方程(其中 a、b、c 都不为零)。

解　先求出该平面的法向量 $\boldsymbol{n}$. 因为 $\boldsymbol{n}$ 垂直于该平面，而 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 都是该平面上的向量，故可取

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -a & b & 0\\ -a & 0 & c\end{vmatrix}=bc\boldsymbol{i}+ca\boldsymbol{j}+ab\boldsymbol{k}.$$

又由于该平面过点 $A(a,0,0)$，由点法式方程得

$$bc(x-a)+ca(y-0)+ab(z-0)=0.$$

即

$$bcx+cay+abz-abc=0.$$

由于 a、b、c 都不为零，上式也可写成

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \qquad (2)$$

公式(2)称为**平面的截距式方程**，其中 a、b、c 分别称为平面在 x 轴、y 轴、z 轴上的**截距**。

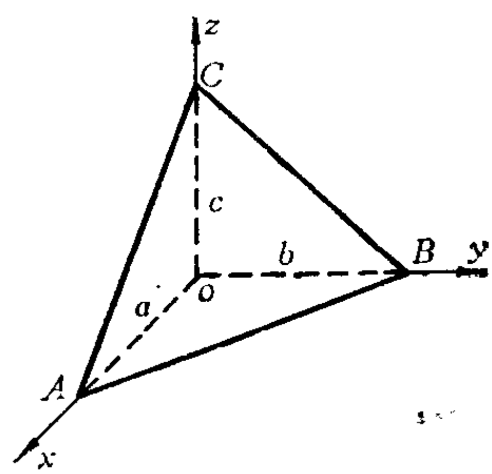


图 7—16

二、平面的一般式方程

将方程（1）展开，得

$$Ax+By+Cz+(-Ax_0-By_0-Cz_0)=0,$$

令 $-Ax_0-By_0-Cz_0=D$，则有

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

这个方程是关于x、y、z的一次方程．由于任何平面都可以由点法式方程（1）来表示，所以平面的方程是三元一次方程．反之，任给三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{3}$$

其中A、B、C不同时为零，取方程（3）的一组解x_0、y_0、z_0，则有

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0, \tag{4}$$

由(3)减去(4)得

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

这就是方程(1)，它代表过点$M_0(x_0, y_0, z_0)$而与向量$\boldsymbol{n}=\{A, B, C\}$垂直的平面．因为这个方程与（3）同解，所以三元一次方程表示一个平面。

方程(3)称为**平面的一般式方程**，其中x、y、z的系数A、B、C是平面法向量的三个坐标，即$\boldsymbol{n}=\{A, B, C\}$．

根据平面的一般式方程，我们来讨论一些特殊位置的平面的方程．

(1)当$D=0$时，方程（3）成为$Ax+By+Cz=0$，因点$(0, 0, 0)$的坐标满足此方程，所以它表示通过原点的平面；

(2)当$A=0$时，方程(3)成为$By+Cz+D=0$，法向量$\boldsymbol{n}=\{0, B, C\}$与$\boldsymbol{i}=\{1, 0, 0\}$垂直，所以该平面平行于$x$轴；

同理，$B=0$ 时，平面 $Ax+Cz+D=0$ 平行于 y 轴；$C=0$ 时，平面 $Ax+By+D=0$ 平行于 z 轴；

特别地，当 $A=D=0$ 时，方程(3) 成为 $By+Cz=0$，表示平面通过 x 轴；同理，方程 $Ax+Cz=0$ 及 $Ax+By=0$ 分别表示通过 y 轴及 z 轴的平面。

(3)当 $B=C=0$ 时，方程(3) 成为 $Ax+D=0$，法向量 $\boldsymbol{n}=\{A, 0, 0\}$ 与 $\boldsymbol{i}=\{1,0,0\}$ 平行，所以该平面平行于 yz 面；

同理，平面 $By+D=0$ 平行于 zx 面；平面 $Cz+D=0$ 平行于 xy 面。

特别地，当 $A=0$、$B=0$、$D=0$ 时，方程(3)成为 $z=0$，表示 xy 面；同理，$x=0$，$y=0$ 分别表示 yz 面和 zx 面。

例 3 求通过点 $(2,1,-1)$ 且平行于平面 $3x-y+2z=0$ 的平面方程。

解 因所求平面与平面 $3x-y+2z=0$ 平行，故所求平面的法向量 $\boldsymbol{n}=\{3, -1, 2\}$，由(1)式得所求平面的方程为

$$3(x-2)-(y-1)+2(z+1)=0,$$

即
$$3x-y+2z-3=0.$$

例 4 设一平面通过 x 轴和点 $M(4, -3, -1)$，求平面的方程。

解 因平面通过 x 轴，故可设所求方程为

$$By+Cz=0,$$

将点 M 的的坐标代入，得

$$-3B-C=0,$$

解得 $C=-3B$，代回所求方程并简化方程，即得所求平面的方程为

$$y-3z=0.$$

例 5 指出下列各平面位置的特点：

(1) $2x-3y+20=0$;　　(2) $3x-2=0$;

(3) $4y-7z=0$;　　(4) $x+z=4$。

解 (1)平面$2x-3y+20=0$的法向量$\boldsymbol{n}=\{2, -3, 0\}$与$\boldsymbol{k}=\{0, 0, 1\}$垂直，所以平面平行于$z$轴(图7—17)；

(2)平面$3x-2=0$的法向量$\boldsymbol{n}=\{3, 0, 0\}$与$\boldsymbol{i}=\{1, 0, 0\}$平行，从而平面垂直于$x$轴，即平行于$yz$面，由于$x=\dfrac{2}{3}$，所以该平面过点$\left(\dfrac{2}{3}, 0, 0\right)$且平行于$yz$面(图7—18)；

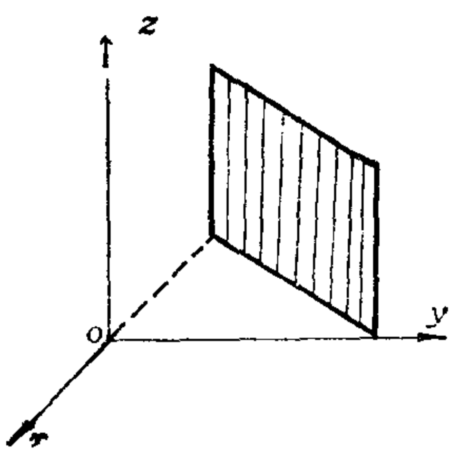


图 7—17

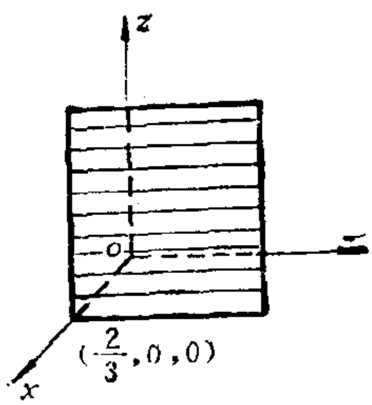


图 7—18

(3)平面$4y-7z=0$过原点，法向量$\boldsymbol{n}=\{0, 4, -7\}$与$\boldsymbol{i}=\{1, 0, 0\}$垂直，所以平面通过$x$轴(图7—19)；

(4)平面$x+z=4$的法向量$\boldsymbol{n}=\{1,0,1\}$与$\boldsymbol{j}=\{0,1,0\}$垂直，所以平面平行于y轴(图7—20)。

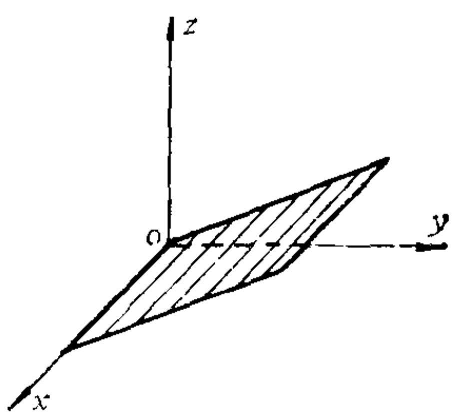


图7—19

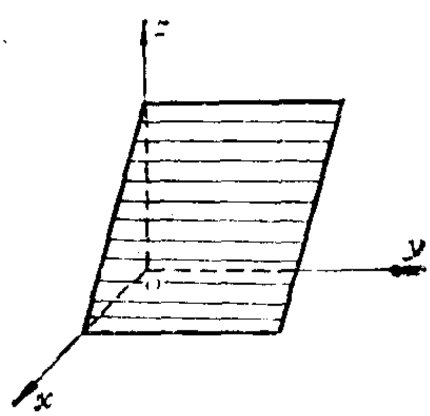


图7—20

习　题　7—3

1. 已知$A(2, -1, 2)$和$B(8, -7, 5)$，求过点B且垂直于$\overrightarrow{AB}$的平面方程.

2. 指出下列平面位置的特点，并作图：

(1) $3x-2y+z=0$；　(2) $-2x+y=0$；

(3) $z=1$；　(4) $x+y+z=1$.

3. 写出满足下列条件的平面方程：

(1) 经过z轴，且过点$(-3, 1, -2)$；

(2) 平行于z轴，且经过点$(4, 0, -2)$和$(5, 1, 7)$.

4. 一平面过点$(2, 1, -1)$，而在x轴和y轴上的截距分别为2和1，求此平面的方程.

5. 求平面$3x+y-2z-6=0$在各坐标轴上的截距，并将平面方程化为截距式方程.

6. 已知一平面过点$(0, 0, 1)$，平面上有向量$\mathbf{a}=\{-2, 1, 1\}$和$\mathbf{b}=\{-1, 0, 0\}$，求此平面的方程.

7. 求通过点$M(1, 1, -1)$且平行于平面$x-y+2z+5=0$的平面方程.

8. 求通过点$A(1, 1, 1)$和$B(2, 2, 2)$且垂直于平面$x+y-z=0$的平面方程.

第四节　空间直线的方程

一、直线的一般式方程

空间直线可以看作是两个平面的交线。如果两个相交平面的方程分别为

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$和$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，

那么，它们的交线就是空间的一条直线。由于直线上任何点的坐标应同时满足这两个平面的方程，而不在直线上的点，它的坐标不能同时满足这两个平面的方程，所以方程组

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}\tag{1}$$

称为**空间直线的一般式方程**。

二、直线的标准方程

设直线过已知点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，且平行于已知向量$\boldsymbol{S}=\{l,m,n\}$，求此直线的方程.

在直线上任取一点$M(x,y,z)$（图7—21），则

$$\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\},$$

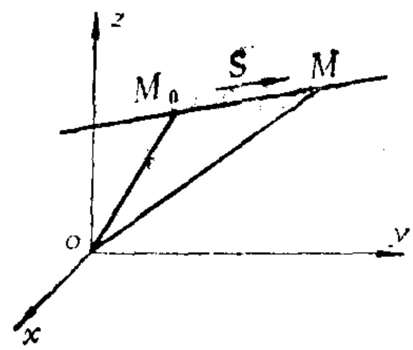


图 7—21

因为$\overrightarrow{M_0M}$与$\boldsymbol{S}$平行，根据两向量平行的充要条件得

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},\tag{2}$$

方程组(2)称为**直线的标准方程**，$\boldsymbol{S}=\{l,m,n\}$称为直线的**方向向量**，其中l、m、n不同时为零。当l、m、n中有一为零时，对应的分子理解为零.例如当$l=0$时，(2)式应理解为

$$\begin{cases}x-x_0=0,\\\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}.\end{cases}$$

$\boldsymbol{S}$的三个坐标 l、m、n 也称为直线的**方向数**。

例 1 求过点(2, 0, 3)且平行于$\boldsymbol{S}=\{4, 1, -1\}$ 的直线方程。

解 由直线的标准方程(2)可知，所求直线的方程为

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{-1}.$$

由于直线的一般式方程(1)不易看出直线的方向数， 所以常需要将一般式方程化为标准方程，下面用具体例子来说明这种方法。

例2 化直线的一般式方程$\begin{cases}x-2y-z+4=0,\\5x+y-2z+8=0\end{cases}$为标准方程.

解 先找出直线上的一点(x_0, y_0, z_0)，可取$x_0=0$代入原方程，得

$$\begin{cases}2y+z-4=0,\\y-2z+8=0.\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$y_0=0, \quad z_0=4,$$

即(0, 0, 4)是直线上的一点。

再来确定直线的方向向量 $\boldsymbol{S}$. 因为直线与两个平面的法向量$\boldsymbol{n}_1=\{1, -2, -1\}$，$\boldsymbol{n}_2=\{5, 1, -2\}$都垂直，所以可取

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\1 & -2 & -1\\5 & 1 & -2\end{vmatrix}=5\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+11\boldsymbol{k},$$

故所求直线的标准方程是

$$\frac{x}{5}=\frac{y}{-3}=\frac{z-4}{11}.$$

三、直线的参数方程

在直线的标准方程中，设其比值为 t，于是

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t,$$

从而得

$$\begin{cases}x=x_0+lt,\\ y=y_0+mt,\\ z=z_0+nt.\end{cases}\tag{3}$$

方程组(3)称为**直线的参数方程**，t 称为参数。

对应于 t 的不同值，由(3)式所确定的点 $M(x, y, z)$ 就描出直线。

例 3 已知直线 $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{-2}$ 和平面 $2x+y-z-5=0$ 相交，求其交点.

解 显然交点坐标既适合平面方程，又应适合直线方程，为便于求解，将直线的标准方程化为参数方程：

令 $$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{-2}=t,$$

从而 $x=1-t$，$y=2+t$，$z=3-2t$，

代入所给平面方程，得

$$2(1-t)+(2+t)-(3-2t)-5=0,$$

解得 $t=4$，代入参数方程，得所求交点的坐标为

$$x=-3,\quad y=6,\quad z=-5.$$

例 4 已知直线过点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和点 $M_2(x_2, y_2, z_2)$，求此直线方程。

解 直线的方向向量 $S=\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$，于是直线方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{4}$$

方程组(4)称为**直线的两点式方程**.

习 题 7—4

1. 分别按下列条件求直线方程：

(1) 经过点(1，−2，3)，平行于直线 $\frac{x-3}{2}=y=\frac{z-1}{5}$；

(2) 经过点(3，4，−4)，方向数为 $\frac{1}{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$-\frac{1}{2}$；

(3) 经过两点(3，−2，−1)和(5，4，5)；

(4) 经过点(0，−3，2)而与两点(3，4，−7)和(2，7，−6)的连线平行.

2. 试求下列直线的标准方程：

(1) $\begin{cases} x-y+z+5=0, \\ 5x-8y+4z+36=0; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x=2z-5, \\ y=6z+7. \end{cases}$

3. 一直线经过点(2，−3，4)且垂直于平面 $3x-y+2z=4$，求此直线方程.

4. 一直线经过点(0，2，4)而与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行，求此直线方程.

5. 求过直线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{2}$ 与平面 $x+y-3z+15=0$ 的交点且垂直于此平面的垂线方程.

第五节　曲面方程

一、曲面方程的概念

给定一个方程 $z=f(x, y)$ 或 $F(x, y, z)=0$，坐标满足此方程的点的轨迹，一般是一个曲面.

定义　在选定的坐标系中，曲面上任一点 (x, y, z) 都满足方程

$$z=f(x, y) \qquad \text{或} F(x, y, z)=0,$$

而不在这个曲面上的任何点都不满足这个方程，那么这个方程就叫做这个**曲面的方程**.

例1　建立球心在 $M_0(x_0, y_0, z_0)$、半径为 R 的球面的方程.

解　设 $M(x, y, z)$ 是球面上的任意一点，于是

$$|MM_0|=R,$$

由于　$$|MM_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$

所以　$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R,$$

即　$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2. \qquad (1)$$

显然，球面上的点的坐标一定满足这个方程，而不在球面上的点的坐标一定不满足这个方程. 故方程(1)是所求的球面方程.

若球心在原点(0, 0, 0)，则球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

例2　一平面平分两点 $A(1, 2, 3)$ 和 $B(2, -1, 4)$ 之间的线段且和它垂直，求此平面的方程.

解 由题意可知，平面上任何点$M(x, y, z)$都满足关系式

$$|AM| = |BM|,$$

所以

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2} = \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2},$$

化简后得

$$2x-6y+2z-7=0.$$

这就是所求平面的方程。

二、旋转曲面

一条平面曲线C，绕同一平面上定直线L旋转一周所成的曲面，称为**旋转曲面**，定直线L称为**旋转轴**。

垂直于旋转轴的平面，与旋转曲面的交线是中心在轴上的圆周。

现在来求yz面上一条曲线C：$F(y, z)=0$绕z轴旋转所成的曲面方程(图7—22)。

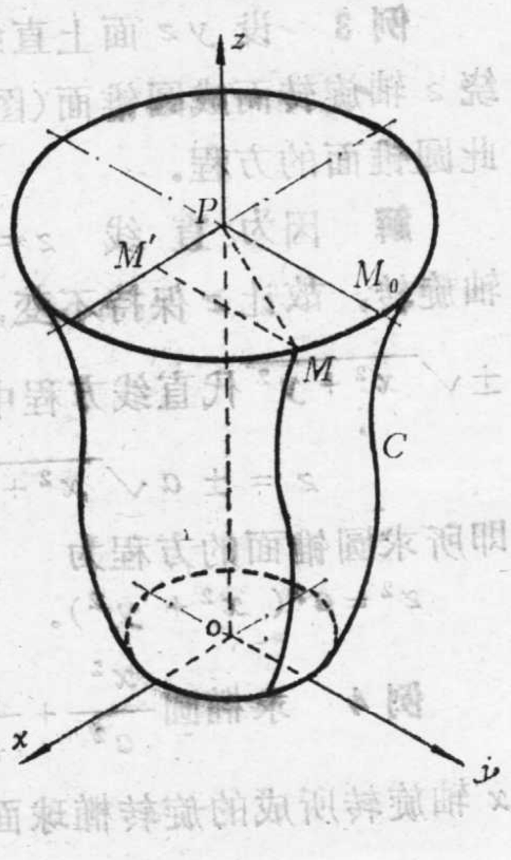


图 7—22

设$M(x, y, z)$为旋转曲面上的任意一点，过点M作平面垂直于z轴，交曲线C于$M_0(0, y_0, z_0)$，交旋转轴于点P，故有$F(y_0, z_0)=0$以及点M的坐标z与点M_0的坐标z_0相等，即

$$z=z_0. \qquad (2)$$

从点M作垂直于xz面的垂线，垂足为M'，于是

$$|PM|^2=|PM'|^2+|MM'|^2=x^2+y^2.$$

但 $|y_0|=|PM_0|=|PM|$，所以

$$y_0=\pm\sqrt{x^2+y^2}\ . \qquad (3)$$

将式(2)、(3)代入方程 $F(y_0,\ z_0)=0$，得旋转曲面方程为

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z)=0. \qquad (4)$$

同理，曲线 C 绕 y 轴旋转的旋转曲面方程为

$$F(y,\ \pm\sqrt{x^2+z^2})=0.$$

因此，求平面曲线 $F(y,\ z)=0$ 绕 z 轴旋转的旋转曲面方程，只要将 y 换成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，z 保持不变，即得所求旋转曲面的方程 $F(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z)=0$.

如果平面曲线 C 是一条直线，而且这条直线与旋转轴相交，则直线绕轴旋转所成的曲面称为圆锥面.

例 3 设 yz 面上直线 $z=ay$，绕 z 轴旋转而成圆锥面(图7—23)，求此圆锥面的方程.

解 因为直线 $z=ay$ 绕 z 轴旋转，故让 z 保持不变，而以 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代直线方程中的 y，则得

$$z=\pm a\sqrt{x^2+y^2},$$

即所求圆锥面的方程为

$$z^2=a^2(x^2+y^2).$$

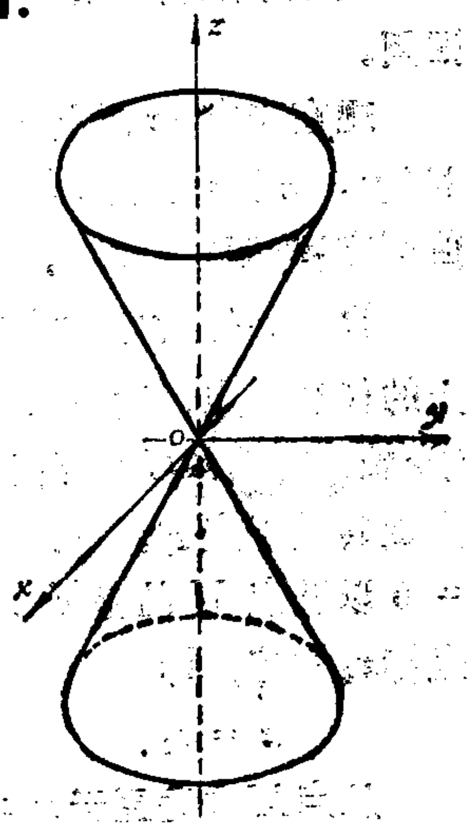


图 7—23

例 4 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 绕 x 轴旋转所成的旋转椭球面方程.

解 让x保持不变，以$\pm\sqrt{y^2+z^2}$代椭圆方程中的y，即得所求方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1.$$

如果$a>b>0$，方程表示绕长轴旋转的旋转面，呈长形。

如果$0<a<b$，方程表示绕短轴旋转的旋转面，呈扁形（图7—24）。

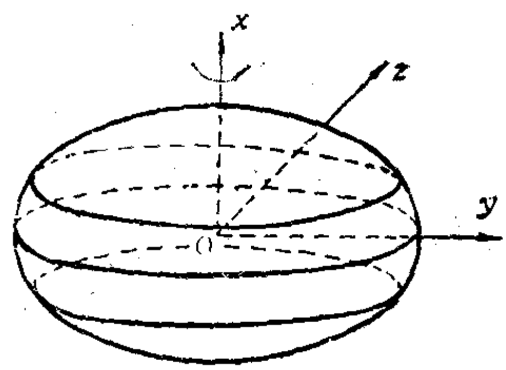


图 7—24

例 5 求抛物线$y^2=2px$绕x轴旋转而成的旋转抛物面方程。

解 让x保持不变，以y^2+z^2代抛物线方程中的y^2，则得旋转抛物面方程为

$$y^2+z^2=2px$$

（图7—25）。

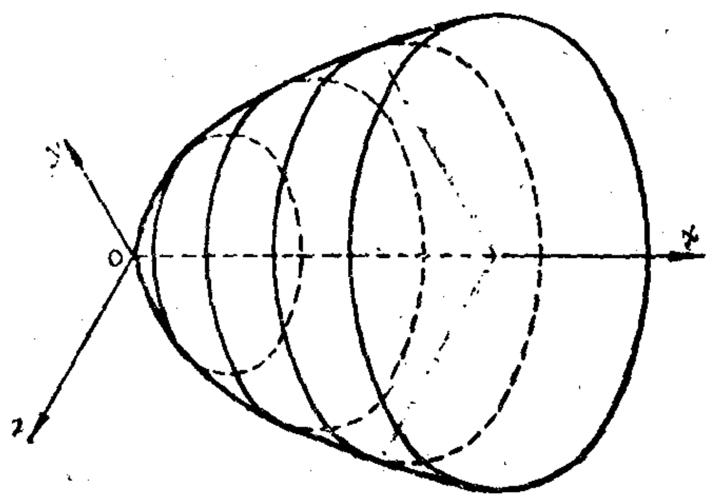


图 7—25

三、 柱 面

定义 设有动直线l，沿给定曲线C平行移动所形成的曲面称为**柱面**。动直线l称为柱面的**母线**，给定的曲线C称为柱面的**准线**。

例如，$x^2+y^2=R^2$是圆柱面的方程(图 7—26)。事实上，在空间直角坐标系中，设$M_0(x_0, y_0, 0)$是满足方程$x^2+y^2=R^2$的一个点，由于这个方程中不含有竖坐标z，因此点$M(x_0, y_0, z)$(其中z取任意数)，也必满足这个方程，但当z为任意数时，点$M(x_0, y_0, z)$在通过点$M_0(x_0, y_0, 0)$而平行于z轴的直线上，所以方程的图形是一个母线平行于z轴，以xy面上的圆$x^2+y^2=R^2$为准线的柱面，此柱面叫做圆柱面。

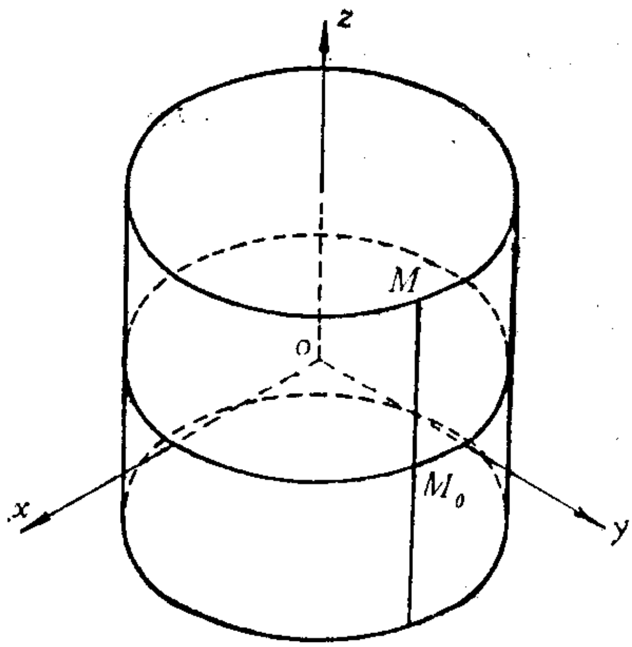


图 7—26

需要特别注意的是，方程$x^2+y^2=R^2$，在xy面上，它所表示的图形是一条平面曲线——圆周；在空间，它所表示的图形是一个空间曲面——圆柱面。

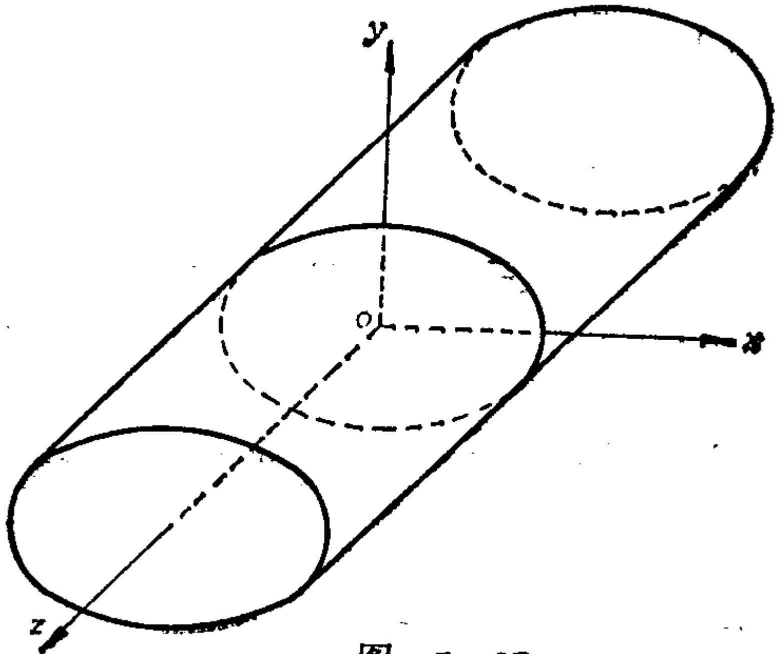


图 7—27

类似地，方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$表示母线平行于$z$轴的柱面，准线是$xy$面上的椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，此柱面叫做**椭圆柱面**（图7—27）。

又如，方程$x^2=4y$表示母线平行于z轴的柱面，准线是xy面上的抛物线$x^2=4y$，此柱面叫做**抛物柱面**(图7—28)。

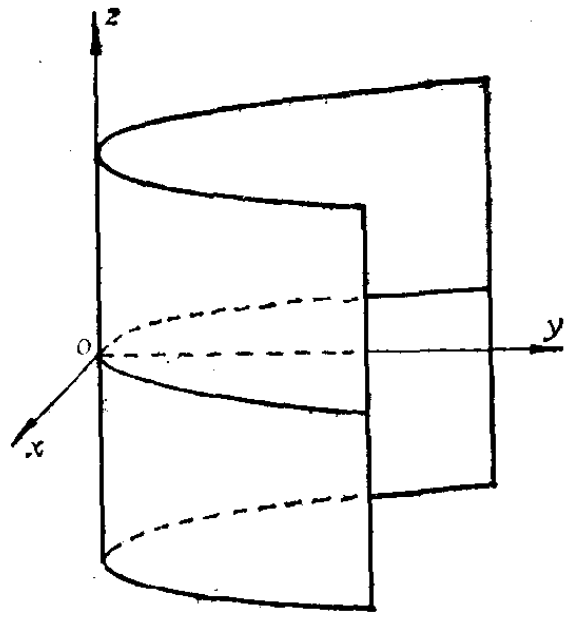


图　7—28

一般地，母线平行于z轴，准线是xy面上的曲线$f(x, y)=0$的柱面方程为

$$f(x, y)=0,$$

所以，母线平行于z轴的柱面的直角坐标方程中不含有坐标z。

同理，方程$f(y, z)=0$及$f(x, z)=0$在空间都表示柱面，它们的母线分别平行于x轴和y轴。

习　题　7—5

1. 指出下列方程所表示的曲面：

(1) $x^2+y^2+z^2=1$；　　(2) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1$；

(3) $x^2+y^2=4z$；　　(4) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-1=0$；

(5) $x^2+y^2=1$;　　　　(6) $x^2=1$;

(7) $x^2+y^2+z^2=0$;　　　　(8) $x^2-y^2=0$.

2. 一球面过(0, 2, 2)、(4, 0, 0)两点，球心在 y 轴上，求它的方程.

3. 一动点与两定点(2, 3, 1)、(4, 5, 6)等距离，求此动点的轨迹方程.

4. 一柱面的母线平行于 x 轴，准线为 yz 面上的曲线 $y^2+z^2-4y=0$，求此柱面的方程.

5. 求将 xy 面上的曲线 $9x^2+4y^2=36$ 绕 y 轴旋转一周所得的旋转曲面方程，并作其草图.

6. 求将 zx 面上的曲线 $z^2=5x$ 绕 x 轴旋转一周所得的曲面方程，并作草图.

7. 试求 xy 面上直线 $x=my$ 绕 y 轴旋转而成的圆锥面方程，并作草图.

第六节　空间曲线的方程

一、空间曲线的一般方程

空间曲线可以看作是两个曲面的交线。若两个曲面的方程分别是

$$F_1(x, y, z)=0 \text{及} F_2(x, y, z)=0,$$

那么，**空间曲线的一般方程**是

$$\begin{cases} F_1(x, y, z)=0, \\ F_2(x, y, z)=0. \end{cases} \tag{1}$$

例如，方程组 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, \\ z=3 \end{cases}$

表示平面 $z=3$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=25$ 的交线方程，其交线

是在 $z=3$ 平面上的圆 $x^2+y^2=16$.

读者要注意，已给一曲线，作为两个曲面的交线，表示它的方程组不是唯一的。例如上面所说的圆，也可表示为

$$\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ z=3, \end{cases}$$

即看作是平面 $z=3$ 与柱面 $x^2+y^2=16$ 的交线。

二、空间曲线的参数方程

与平面曲线一样，空间曲线也可以用参数方程来表示.将曲线上任意一点的坐标 x、y 与 z 用同一个参数 t 的函数表示，即

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t). \end{cases} \qquad (2)$$

给 t 一个值，就得到曲线上一点的坐标 x、y、z，让 t 变动，可得到曲线上所有点。方程组(2)称为**空间曲线的参数方程**。

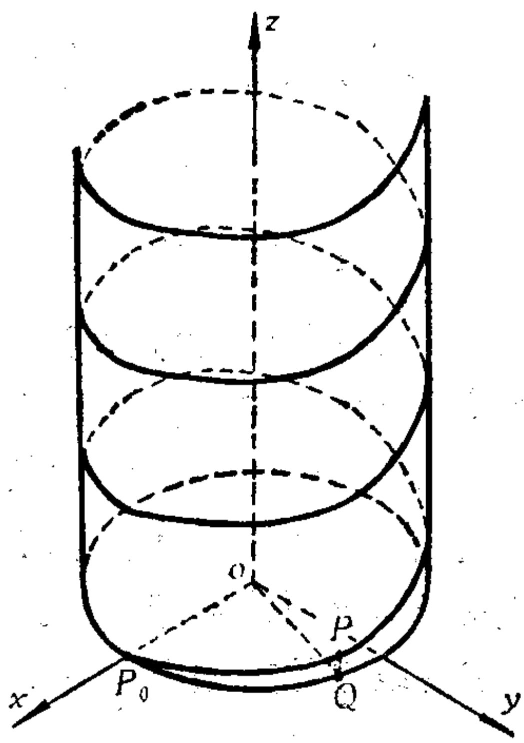


图 7—29

例1 设一动点在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上以均匀的角速度 ω 绕 z 轴旋转，同时又以均匀的线速度 v 平行于 z 轴方向上升，则动点的轨迹称为**螺旋线**，试求其方程。

解 设运动开始时，动点的位置在 $P_0(a,0,0)$，经过时间 t，动点的位置为 $P(x,y,z)$(图7—29)，从 P_0 到

P所转过的角为 $\theta=\omega t$. 由 P 点向 xy 面作垂线，垂足为 $Q(x, y, 0)$，故

$$x=a\cos\theta,\quad y=a\sin\theta.$$

当动点由 P_0 运动到 P 时，它就沿 z 轴方向从 Q 提高到 P，因而 $QP=vt$，即

$$z=vt=\frac{v}{\omega}\theta=k\theta \qquad \left(k=\frac{v}{\omega}\right).$$

则得

$$\begin{cases}x=a\cos\theta,\\ y=a\sin\theta, \qquad (0\leqslant\theta<+\infty)\\ z=k\theta.\end{cases} \tag{3}$$

方程组（3）称为**螺旋线的参数方程**（θ 为参数）.

在机械工程上常见这种螺旋线. 当 θ 由 θ_0 增加到 $\theta_0+2\pi$ 时，螺纹上升一圈，这时 z 的增量 $\Delta z=2\pi k$ 叫做**螺距**.

三、空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线 C 的方程为

$$\begin{cases}F_1(x, y, z)=0,\\ F_2(x, y, z)=0.\end{cases}$$

从曲线 C 上各点向 xy 面作垂线，垂足所构成的曲线称为曲线 C 在 xy 面上的**投影曲线**. 这条投影曲线就是以曲线 C 为准线，母线平行于 z 轴的柱面与 xy 面的交线，这个柱面称为曲线 C 关于 xy 面的**投影柱面**.

在曲线 C 的方程中消去 z，得

$$F(x, y)=0,$$

这是通过曲线C而母线平行于z轴的柱面方程，显然，它就是曲线C关于xy面的投影柱面方程。于是，C在xy面上投影曲线的方程为

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

同理，从C的方程中消去x或y，可以得到曲线C在yz面或zx面上的投影曲线方程.

投影曲线在第九章重积分的计算中很有用处。

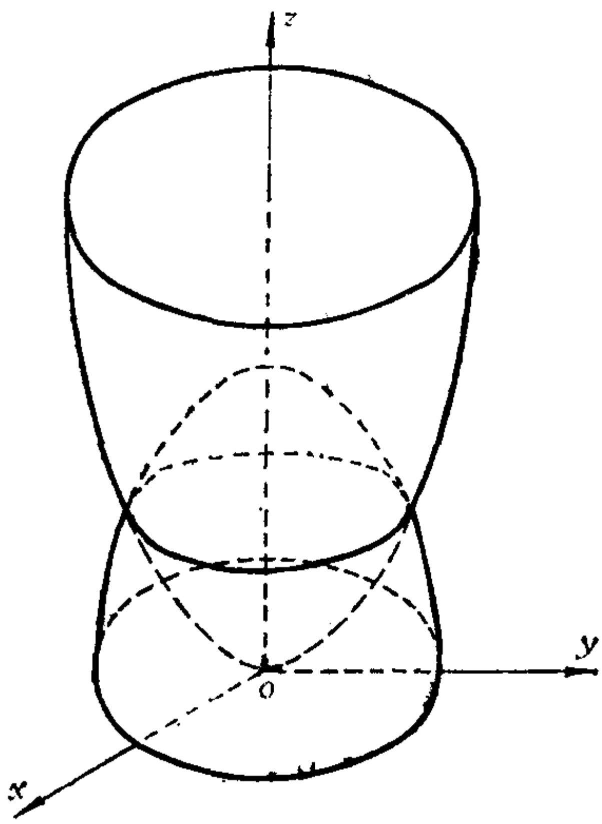


图 7—30

例 2 求曲线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ x^2 + y^2 = 2 - z \end{cases}$$

(图 7—30)在xy面上的投影曲线方程。

解 由所给方程组消去z得投影柱面的方程为

$$x^2 + y^2 = 1,$$

所以该曲线在xy面上的投影曲线方程是

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

这是xy面上一个圆心在原点、半径为1的圆。

例 3 求曲线$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ x^2 + y^2 - Rx = 0 \end{cases}$ 在xy面上的投影曲线方程。

解 所给曲线是以$\dfrac{R}{2}$为半径的圆柱面与球面的交线（图7

—31）. 这个圆柱面就是曲线关于 xy 面的投影柱面，所以曲

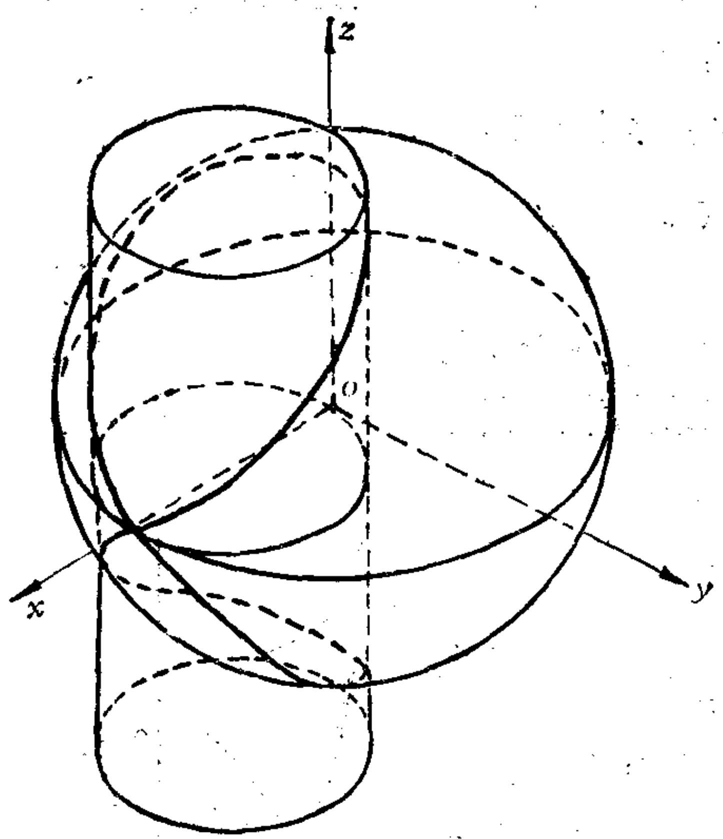


图 7—31

线在 xy 面上的投影曲线方程是

$$\begin{cases} x^2+y^2-Rx=0, \\ z=0. \end{cases}$$

这是 xy 面上一个圆心在 $\left(\frac{R}{2},\ 0,\ 0\right)$、半径为 $\frac{R}{2}$ 的圆。

习 题 7—6

1．指出下列方程或方程组在平面和空间所代表的不同的几何图形：

（1）$x=4$；　　（2）$x+y=1$；

（3）$x^2+y^2=1$；　　（4）$x^2-y^2=1$；

(5) $\begin{cases} y=3x+2, \\ y=2x-3; \end{cases}$　　　　(6) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1, \\ y=3. \end{cases}$

2. 指出下列曲面与坐标面的交线：

(1) $x^2+4y^2+16z^2=64$;　　　　(2) $x^2+4y^2-16z^2=64$;

(3) $x^2+9y^2=10z$;　　　　(4) $x^2+4y^2-16z^2=0$.

3. 求曲线$\begin{cases} x^2+z^2+3yz-2x+3z-3=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$在$xy$面上的投影曲线方程.

4. 求曲线$\begin{cases} x^2+y^2-z=0 \\ z=x+1 \end{cases}$在$xy$面上的投影曲线方程.

5. 求两球面$x^2+y^2+z^2=1$和$x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$的交线在xy面上的投影曲线方程.

第七节　二次曲面

我们已经知道，空间曲面的方程可以表示为

$$F(x, y, z)=0.$$

一次方程所表示的曲面即为平面，二次方程所表示的曲面称为**二次曲面**. 下面我们讨论几种常见的二次曲面.

一、椭球面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

所表示的曲面叫做**椭球面**. 其形状讨论如下：

由方程(1)知

$$\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1,\ \frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,\ \frac{z^2}{c^2}\leqslant 1,$$

即 $|x|\leqslant a,\ |y|\leqslant b,\ |z|\leqslant c$。

这说明椭球面介于 $x=\pm a$，$y=\pm b$，$z=\pm c$ 这六个平面所构成的长方体内。a、b、c 叫做椭球面的**半轴**。

为了能清楚地看出曲面的形状，再用一组或几组平行的平面去截这个曲面，由截得的交线(称为**截痕**)的形状来看清曲面的形状，这种方法叫做**截痕法**。

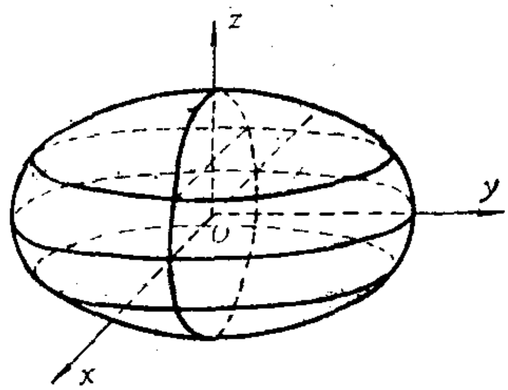


图 7—32

用三个坐标面 $x=0$，$y=0$，$z=0$ 分别截这个椭球面，所得的截痕为

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0.\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.\\ z=0;\end{cases}$$

它们是各坐标面上的椭圆。再用平行于 xy 面的平面 $z=h$ ($|h|<c$)去截椭球面，所得截痕为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)}=1,\\ z=h,\end{cases}$$

这是平面 $z=h$ 上的椭圆，两个半轴分别为

$$\frac{a}{c}\sqrt{c^2-h^2}\ 及\ \frac{b}{c}\sqrt{c^2-h^2}.$$

当$|h|$逐渐增大时，所截得的椭圆逐渐缩小，当$|h|=c$时，所截得的椭圆缩为一点。

同样地，用平面$x=h$和$y=h$去截椭球面所得截痕也是椭圆。

由以上讨论可知椭球面的图形如图7—32所示。

当$b=c$时，方程（1）变为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1,$$

它表示xy面上的椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$绕$x$轴旋转的**旋转椭球面**。同理可得绕$y$轴和$z$轴旋转的旋转椭球面。

当$a=b=c$时，方程（1）变为

$$x^2+y^2+z^2=a^2,$$

它表示球心在原点O、半径为a的球面。

二、 抛 物 面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z \qquad (2)$$

所表示的曲面叫做**椭圆抛物面**。其形状讨论如下：

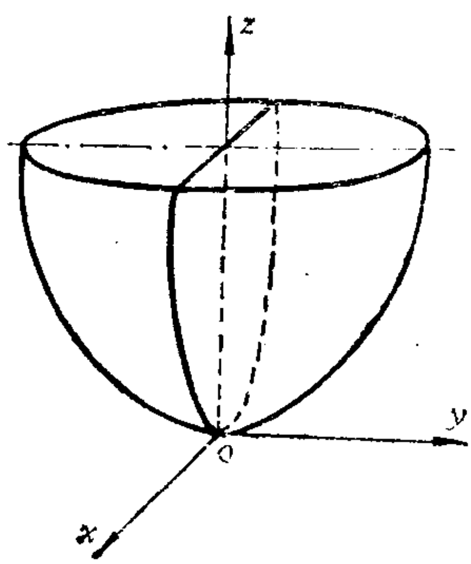


图 7—33

用平行于xy面的平面$z=h$去截椭圆抛物面，所得截痕为

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=h,\\ z=h.\end{cases}$$

当 $h=0$ 时它是一个点(即原点)； $h<0$ 时无交线； $h>0$ 时它是一个椭圆，当 h 逐渐增大时，椭圆也愈来愈大。

用平面 $x=h$ 或 $y=h$ 去截椭圆抛物面，所得的截痕均为抛物线(图 7—33)。

在方程(2)中，当 $a=b$ 时，得

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}=z,$$

这是由抛物线 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}=z\\ y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\dfrac{y^2}{a^2}=z\\ x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转而得的**旋转抛物面**。

三、 双 曲 面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{3}$$

所表示的曲面叫做**单叶双曲面**。

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \tag{4}$$

所表示的曲面叫做**双叶双曲面**。

下面讨论单叶双曲面(3)的形状：

用平面 $z=h$ 去截曲面，所得截痕为椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)}=1,\\ z=h.\end{cases}$$

用平面 $x=h$ 和 $y=h$ 去截曲面，所得截痕都是双曲线（图 7—34）。

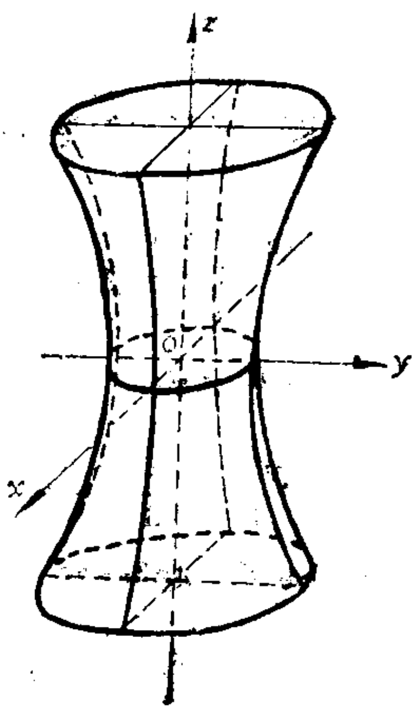


图 7—34

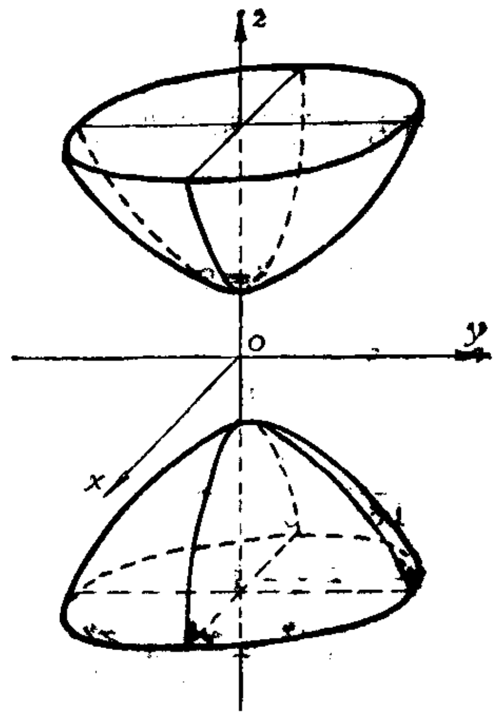


图 7—35

在方程（3）中，当 $a=b$ 时，得

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

这是由双曲线 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转而得的**单叶旋转双曲面**。

对于双叶双曲面(4)的形状，可用截痕法进行类似的讨论（图 7—35）。

习 题 7—7

1. 指出下列方程所表示的曲面，若为旋转曲面，说明它们是怎样产生出来的：

（1）$x^2+2y^2+3z^2=9$；　　（2）$x^2-\frac{y^2}{4}+z^2=1$；

（3）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=3z$；　　（4）$x^2+y^2=4z$；

（5）$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{9}=-1$；　　（6）$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=-1$；

（7）$x^2-y^2-z^2=1$；　　（8）$4x^2+9y^2-4z^2=36$.

2. 分别写出曲面$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{4}=1$在下列各平面上的截痕的方程，并指出这些截痕是什么曲线：（1）$x=2$；（2）$y=0$；（3）$y=5$；（4）$z=2$；（5）$z=1$.

3. 求单叶双曲面$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{5}=1$与平面$x-2z+3=0$的交线关于$xy$面的投影柱面方程.

复 习 题 七

1. 在yz面上，求与三个已知点$A(3, 1, 2)$、$B(4, -2, -2)$和$C(0, 5, 1)$等距离的点.

2. 求向量$\mathbf{a}=\mathbf{i}+\sqrt{2}\mathbf{j}+\mathbf{k}$与坐标轴之间的夹角.

3. 求平行于向量$\mathbf{a}=\{6, 7, -6\}$的单位向量.

4. 从点$A(2, -1, 7)$沿向量$\mathbf{a}=8\mathbf{i}+9\mathbf{j}-12\mathbf{k}$的方向取点$B$，使线段长$|AB|=34$，求点$B$的坐标.

5. 已知三角形ABC的两边是向量$\overrightarrow{AB}=\{2, 1, -2\}$，$\overrightarrow{BC}=\{3, 2, 6\}$，求三角形的三内角.

6. 已知向量$\mathbf{a}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$，$\mathbf{b}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$和$\mathbf{c}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}$，计算：(1) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})$；(2) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$.

7. 求过点$(1, -1, 1)$且垂直于两平面$x-y+z-1=0$和$2x+y+z+1=0$的平面方程.

8. 求过两点$(1, 2, -1)$和$(-5, 2, 7)$且平行于x轴的平面方程.

9. 求通过x轴且垂直于平面$5x+4y-2z+3=0$的平面方程.

10. 试求两直线$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+4}{7}$和$\dfrac{x+6}{5}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{-1}$的夹角的余弦.

11. 证明两直线$\begin{cases}x+2y-z=7,\\-2x+y+z=7\end{cases}$与$\begin{cases}3x+6y-3z=8,\\2x-y-z=0\end{cases}$相互平行.

12. 证明两直线$\begin{cases}x+2y=1,\\2y-z=1\end{cases}$与$\begin{cases}x-y=1,\\x-2z=3\end{cases}$相互垂直.

13. 写出适合下列条件的旋转曲面的方程，并作出其草图：

(1) 把曲线$\begin{cases}6x^2+4y^2=36,\\z=0\end{cases}$绕$y$轴旋转一周；

(2) 把曲线$\begin{cases}4x^2-9y^2=36,\\z=0\end{cases}$绕$x$轴旋转一周；

(3) 把曲线$\begin{cases}x^2=5z,\\y=0\end{cases}$绕$z$轴旋转一周；

(4) 把曲线$\begin{cases}x^2+z^2=9,\\y=0\end{cases}$绕$z$轴旋转一周；

(5) 把直线$\begin{cases}y=kx,\\z=0\end{cases}$绕$y$轴旋转一周.

14. 求球面$x^2+y^2+z^2=9$与平面$x+z=1$的交线在xy面上的投影曲线方程.

15. 求空间直线$\begin{cases}x+y+z=3,\\x+2y=1\end{cases}$在$yz$面上的投影曲线方程.

16.求螺旋线 $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = k\theta \end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线的方程.

17.求曲面 $z^2 + xy - yz - 5x = 0$ 与直线 $\frac{x}{-1} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-10}{7}$ 的交点.

18.描绘下列各组曲面所围成的立体在第一卦限内的图形:

(1) $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=2$, $y=1$, $3x+4y+2z-12=0$;

(2) $x=0$, $z=0$, $x=1$, $y=2$, $z=\frac{y}{4}$;

(3) $z=0$, $z=3$, $x-y=0$, $x-\sqrt{3}y=0$, $x^2+y^2=1$;

(4) $x=0$, $y=0$, $z=0$, $\frac{x}{8}+\frac{y}{2}+z=1$;

(5) $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x^2+y^2=R^2$, $y^2+z^2=R^2$.

第八章　多元函数微分法及其应用

前面我们讨论的函数都是依赖于一个自变量的函数，即一元函数。在实际问题中，常常遇到依赖于两个或更多个自变量的函数，即多元函数。本章将在一元函数微分学基础上，讨论多元函数微分学。讨论中将以两个自变量的情况为主，因为从一个自变量的函数到两个自变量的函数会出现一些新的问题，但从两个自变量的函数到更多个自变量的函数就没多大差别，也就是说容易从二元函数的情况类推到二元以上的多元函数。

第一节　多元函数的概念

一、二元函数的定义

先看两个例子。

例1　在直流电路中，设电流为 I，电阻为 R，电压为 V，则三个变量 I、R、V 之间的关系为

$$V=IR.$$

当变量 I、R 在一定范围（$I\geqslant 0$，$R\geqslant 0$）内取定一对数值时，V 就有确定值与它们对应。

例2　设（x，y，z）是中心在原点，半径为 R 的球面上的任意一点，则上半球面可由方程

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

表示，当x、y在一定范围（$x^2+y^2\leqslant R^2$）内取定一对数值时，z就有确定的值与它们对应。

1. 二元函数的定义

抽去上面两例中的实际意义，它们都表达了三个变量之间的依赖关系。当其中两个变量取确定数值后，第三个变量按照一定的规律就有确定的数值与之对应。由此得

定义 设有三个变量x、y和z。如果当变量x、y在一定范围内任意取定一对数值时，变量z按照一定的规律，总有确定的数值与它们对应，则称z是x、y的**二元函数**，记作

$$z=f(x,\ y),$$

其中变量x、y叫做**自变量**，z叫做**因变量**。自变量x、y的变化范围叫做**函数的定义域**。

类似地可以定义三元函数$u=f(x,\ y,\ z)$以及n元函数$u=f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n)$。

设点P的坐标为x，则一元函数$u=f(x)$可以写成$u=f(P)$。设点P的坐标为$(x,\ y)$，则二元函数$u=f(x,\ y)$也可以写成$u=f(P)$。类似地，设点P的坐标为$(x_1,x_2,\ \cdots,x_n)$，则n元函数$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$也可以写成$u=f(P)$，称u为**点P的函数**。这样，不论是一元函数还是多元函数都可统一地表示为点P的函数，记作$u=f(P)$。

2. 二元函数定义域的表示法

如果对于某一点P，函数$u=f(P)$有确定的值，我们就说$f(P)$在点P有定义。显然定义域中的任一点，都使函数$f(P)$有定义。一元函数的定义域一般是x轴上的区间，二

元函数的定义域一般是平面上的一个区域．什么是区域？我们给出下面的定义．

定义 全部xy平面或由一条至几条曲线所围成的一部分平面叫做**区域**，常用字母D表示．围成区域的曲线叫做该区域的**边界**．不包括边界的区域，称为**开区域**；连同边界在内的区域称为**闭区域**．如果一个区域可以被包含在一个以原点为中心，适当长度为半径的圆内，则称此区域为**有界区域**；否则称为**无界区域**．开区域内的点称为**内点**，而边界上的点则称为**边界点**．

如同区间可以用不等式表示一样，常见的区域可用x、y的不等式或不等式组表示．

例 3 求下列函数的定义域：

(1) $z=\sqrt{xy}$；　　(2) $z=\arcsin(x^2+y^2)$；

(3) $z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$．

解 (1) 定义域D：$xy\geqslant 0$．即xy面上第一、三两个象限（包括坐标轴在内，图8—1(1)），是无界区域．

(2) 定义域D：$x^2+y^2\leqslant 1$，即圆周$x^2+y^2=1$及其内部（图8—1(2)），是有界区域．

(3) 定义域D：$\begin{cases} y-x>0, \\ x\geqslant 0, \\ x^2+y^2<1. \end{cases}$

即不包括圆弧上的点与直线$y=x$上的点的圆扇形（图8—1(3)），是有界区域．

类似地，三元函数的定义域，一般是由一个或几个曲面所围成的空间区域．

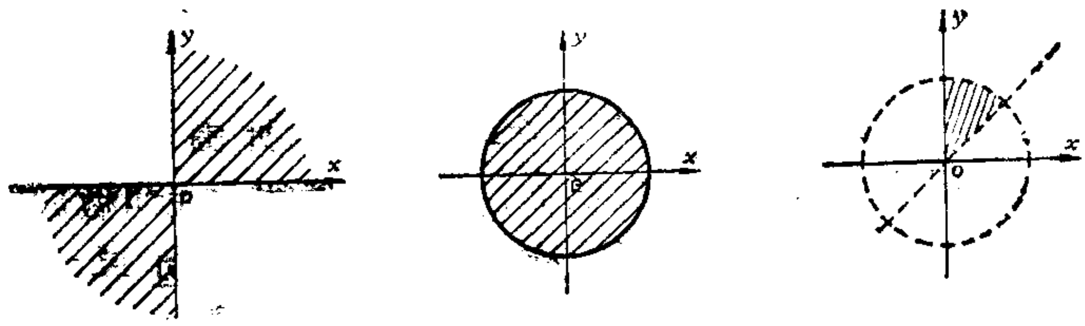


图 8—1

二、二元函数的几何意义

对于二元函数$z = f(x, y)$，我们可以用空间直角坐标系来给出几何解释．设$P(x, y)$是其定义域D中的一点，与它对应的函数值是$z = f(x, y)$，在空间直角坐标系中作出点$M(x, y, z)$．当点$P(x, y)$在D中变动时，对应点M就在空间变动，点$M(x, y, z)$的全体便形成一个曲面，这个曲面叫做函数$z = f(x, y)$的图形（图8—2）．我们在第七章讲过的平面和曲面，都可以作为二元函数的图形的例子．

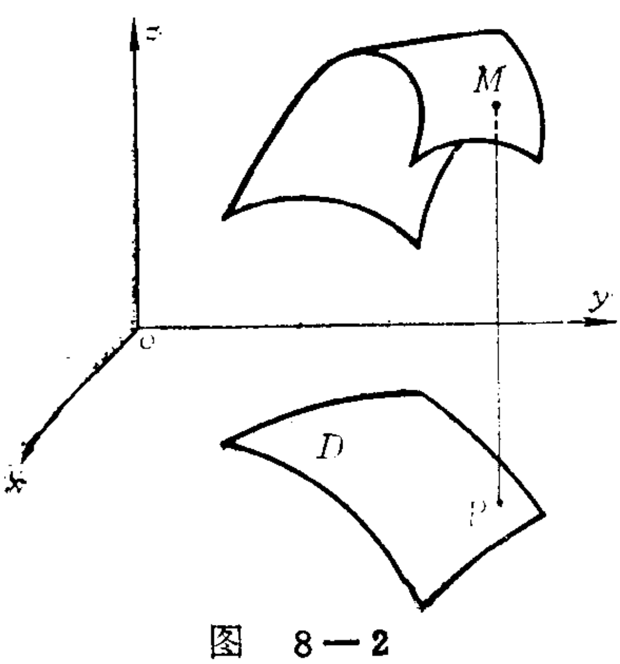


图 8—2

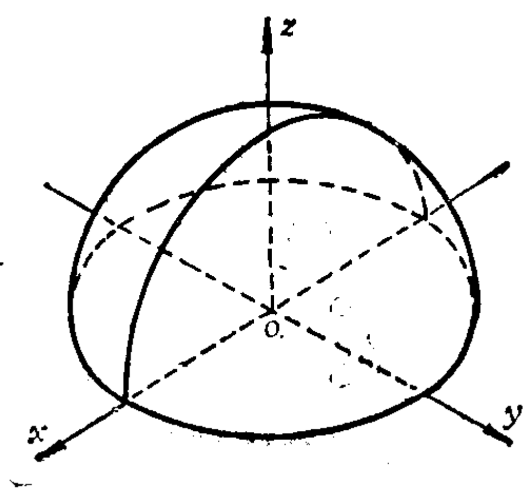


图 8—3

例如，函数 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$（$a>0$）的图形是球心在原点，半径为 a 的上半球面（图8—3）。而 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$ 的图形是球心在原点，半径为 a 的整个球面。它们的定义域 D 是：$x^2+y^2\leqslant a^2$．对于 D 内的每一个点（x，y），前者只有一个 z 值与之对应，后者则有两个 z 值与之对应，称 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 为二元单值函数，$x^2+y^2+z^2=a^2$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$ 为二元多值函数。以后如果没有特别说明，所讨论的函数 $z=f(x,y)$ 都限于单值函数。

习　题　8—1

1．作出下列区域的图形，并指出是开区域还是闭区域：

(1) D：$1<x^2+y^2<2$；　　(2) D：$xy\leqslant 1$；

(3) D：$x^2+y^2\neq 0$；　　(4) D：$x^2\leqslant y\leqslant 1-x^2$；

(5) D：$|x|+|y|<1$．

2．求出下列函数的定义域，并画出定义域的图形．

(1) $z=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+y^2}$；　　(2) $z=\sqrt{x}+\sqrt{y}$；

(3) $z=\ln(-x-y)$；　　(4) $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$；

(5) $z=\arcsin(x-y)$；　　(6) $z=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$；

(7) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}$

$(R>r>0)$．

3．已知函数 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}$，

试求 $f(tx,ty)$．

4．若函数 $z=f(x,y)$ 恒满足关系式：

$$f(tx,\ ty)=t^k f(x,\ y),$$

就叫做x、y的k次齐次函数，试证k次齐次函数$z=f(x,\ y)$，能化成$z=x^k F\left(\frac{y}{x}\right)$的形式。

5．设$z=f(x+y)+x-y$，若当$x=0$时，$z=y^2$，求函数$f(x)$及z。

第二节　二元函数的极限与连续性

一、二元函数的极限

在一元函数中，我们讨论了当$x\to x_0$时，函数$y=f(x)$的变化趋势。当然，对于二元函数，我们就要讨论当$x\to x_0$，$y\to y_0$即点$(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)$时，函数$z=f(x,\ y)$的变化趋势。

定义　设函数$z=f(x,\ y)$在点$P_0(x_0,\ y_0)$的某一邻域* 内有定义（点P_0可以除外），点$P(x,\ y)$是点P_0邻域内不同于P_0的任意一点。如果当点P以任意方式趋近于点P_0时，函数的对应值都趋近于一个确定的常数A，则称A为函数$z=f(x,\ y)$当$(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)$时的极限，记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,\ y)=A \text{ 或 } \lim_{P\to P_0} f(P)=A.$$

应当注意的是，在一元函数的极限定义中，点x只从x_0的左右两侧趋近于点x_0，但二元函数极限的存在，要求点

---

* 以点$P_0(x_0,\ y_0)$为中心，$\delta>0$为半径的圆的内部的点的全体，称为点P_0的δ邻域，即满足不等式$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2$的点的全体。

$P(x, y)$以任意方式趋近于点$P_0(x_0, y_0)$时函数的对应值都趋近于A。如果点P只取某些特殊方式，例如，沿平行于坐标轴的直线或沿某一条曲线趋近于点P_0，即使这时函数趋近于某一确定值，我们也不能断定函数极限就一定存在。

类似地，可给出二元以上的函数的极限定义。

例1 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

解 当点$(x, y)\to$点$(0, 0)$时，有$xy\to 0$，又$\left|\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant 1$，由于有界量与无穷小量的乘积仍为无穷小量，所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} xy\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0.$$

例2 考察函数$\dfrac{x-y^2}{x^2+y^2}$当$(x, y)\to(0, 0)$时极限是否存在。

解 因为当动点沿y轴趋近于点$(0, 0)$时$x=0$，从而有

$$\lim_{\substack{x=0\\ y\to 0}}\frac{x-y^2}{x^2+y^2}=-1;$$

当动点沿x轴趋近于点$(0, 0)$时$y=0$，从而有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}}\frac{x-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-0}{x^2+0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty.$$

由于(x, y)沿不同路径趋近于点$(0, 0)$时函数不趋向于同一数值，所以极限不存在。

一般地说，若动点(x, y)沿不同的路径趋近于点(x_0, y_0)

时，$f(x, y)$趋近于不同的值，则$(x, y)\to(x_0, y_0)$时，函数的极限不存在。这是判定极限不存在的常用方法。

例3 考察函数

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y)\neq(0, 0),\\ 0, & (x, y)=(0, 0).\end{cases}$$

当$(x, y)\to(0, 0)$时的极限是否存在。

解 当点(x, y)沿y轴趋近于点$(0, 0)$时，$g(0, y)=0$，从而有

$$\lim_{\substack{x=0\\ y\to 0}} g(x, y)=\lim_{y\to 0} g(0, y)=0;$$

当点(x, y)沿x轴趋近于点$(0, 0)$时，$g(x,0)=0$，从而有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} g(x,y)=\lim_{x\to 0} g(x,0)=0.$$

虽然沿上面两条特殊路径时，函数$g(x, y)$的极限存在且相等，但$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} g(x, y)$是不存在的，因为当点$(x, y)$沿着直线$y=kx$趋近于点$(0, 0)$时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} g(x, y)=\lim_{x\to 0} g(x, kx)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

随着k的取值不同，$\dfrac{k}{1+k^2}$的值也不同，故极限不存在。

二、二元函数的连续性

有了二元函数极限的概念，就容易给出二元函数连续的概念。

定义 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 及其邻域内有定义，如果当点 $P(x,y)$ 趋近于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $z=f(x,y)$ 的极限存在，且等于它在点 P_0 处的函数值，即

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

或

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0),$$

则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 P_0 处连续。

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内各点都连续，则称 $z=f(x,y)$ 是 D 内的连续函数。二元连续函数的图形是一个无孔洞、无裂缝的曲面。例如，连续函数 $z=x^2+y^2$ 的图形是一个旋转抛物面。

使函数不连续的点叫做函数的**间断点**。

例如，函数

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 及其邻域内有定义，但在点 $(0,0)$ 的极限不存在，所以，点 $(0,0)$ 是函数的间断点，该函数在除去原点的整个平面上处处连续。

又如，函数

$$f(x,y)=\frac{xy}{x+y}$$

在直线 $x+y=0$ 上没有定义，所以，直线上的每一点都是它的间断点。因此，二元函数的间断点有时可以形成一条曲线。

类似地，可给出二元以上的函数在某点连续的定义。

和一元初等函数相类似，由含多个自变量的基本初等函数，经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成，并能用一个解析式子表示的函数，称为多元初等函数。如，

$$z=x-y+1; \qquad z=\sin(x+y);$$

$$z=\frac{3+\sqrt{xy}}{3\cdot\sqrt{x+y}}; \qquad z=e^{xy}\ln(1+x^2+y^2)$$

都是二元初等函数。

一切多元初等函数在其定义区域内都是连续的。

所以，在定义区域内任何点处求多元初等函数的极限，就是求该点的函数值。如，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to\frac{1}{2}}}\arcsin\sqrt{x^2+y^2}=\arcsin\sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}.$$

与闭区间上一元连续函数的性质相类似，在有界闭区域上连续的多元函数也有如下性质：

性质1°（最大值和最小值定理） 在有界闭区域上连续的多元函数在该区域上一定有最大值和最小值.

性质2°（介值定理） 在有界闭区域上连续的多元函数必取得介于两个不同函数值之间的任何值至少一次.

上面关于二元函数极限与连续的讨论完全可以推广到三元以及更多元的函数。

习 题 8—2

1. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \arcsin\sqrt{x^2+y^2}$；

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

2. 考察下列函数的极限是否存在：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$；

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$.

3. 函数 $z=\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$ 在何处是间断的？

第三节 偏导数与全微分

一、偏导数的定义

1. 偏导数的定义

在一元函数中，导数就是函数对自变量的变化率，这个概念可以推广到多元函数中来。下面先看一个例子。

例 1 气缸内理想气体的体积 V 和压强 P、绝对温度 T 之间的函数关系为：

$$V=R\frac{T}{P} \qquad （R为常量）.$$

当温度 T 和压强 P 同时变化时，体积 V 的变化较复杂，通常分

为两种特殊情形来考虑：

(1) 等温过程. 即温度一定（$T=$常数），考虑因压强P的变化引起的体积V的变化率：

$$\frac{dV}{dP}=-R\cdot\frac{T}{P^2}.$$

(2) 等压过程. 即压强不变（$P=$常数），考虑因温度T的变化引起的体积V的变化率：

$$\frac{dV}{dT}=R\cdot\frac{1}{P}.$$

如上分别地考虑这两种特殊的变化，将有助于对整体过程的综合研究. 这种只让一个自变量变动，其余自变量暂时固定以研究函数变化的方法是研究多元函数的常用手段.

定义 设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的邻域内有定义，当y固定在y_0而x在x_0处有增量Δx时，相应地函数有增量，记为$\Delta_x z$：

$$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0).$$

如果当$\Delta x\to 0$时，比值$\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$的极限存在，则称此极限值为函数$z=f(x,y)$**在点$(x_0,y_0)$处对$x$的偏导数**，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.z_x\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},$$

或 $f_x(x_0,y_0)$，

即 $$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x},$$

其中$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)$称为函数$z$**对$x$的偏增量**.

同样，定义$z=f(x, y)$**在点(x_0, y_0)处对y的偏导数为**：

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)}{\Delta y},$$

记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.z_y\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\quad 或 f_y(x_0, y_0),$$

其中$\Delta_y z=f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)$称为函数$z$**对$y$的偏增量**. 如果$f(x, y)$在区域$D$内每一点$(x, y)$处对$x$的偏导数都存在，这个偏导数是$x$、$y$的函数，称为函数$z=f(x, y)$**对自变量$x$的偏导函数**，记作

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x},\ z_x 或 f_x(x, y).$$

类似地，可以定义函数$z=f(x, y)$**对自变量y的偏导函数**，记作

$$\frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ z_y 或 f_y(x, y).$$

在不致混淆的情况下，偏导函数也简称为**偏导数**.

由偏导数的定义可知，例1中所讨论的两个导数，实际上是两个偏导数：

$$\frac{\partial V}{\partial P}=-R\cdot\frac{T}{P^2},\qquad \frac{\partial V}{\partial T}=R\cdot\frac{1}{P}.$$

偏导数的概念可以推广到二元以上的函数，不再一一叙述.

2.偏导数的求法

由偏导数的定义可知，求多元函数的偏导数，并不需要什么新的技巧，在对某一个自变量求导时，只有这个自变量在变动，其余自变量暂时看作常量，于是，对这个自变量求偏导数的方法就和一元函数求导数的方法一样。

例2 求$z=x^2\sin 2y$在点$\left(-1,\frac{\pi}{6}\right)$处的偏导数。

解 把y看作常量，对x求导，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sin 2y;$$

把x看作常量，对y求导，得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2x^2\cos 2y.$$

再把$\left(-1,\frac{\pi}{6}\right)$代入，得

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=-1\\ y=\frac{\pi}{6}}}=2\cdot(-1)\cdot\sin\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3};$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=-1\\ y=\frac{\pi}{6}}}=2(-1)^2\cos\frac{\pi}{3}=1$$

例3 设$z=x^y\ (x>0)$，求证：

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=2z.$$

证 因为$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$,

所以$\frac{x}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$

$$=\frac{x}{y}yx^{y-1}+\frac{1}{\ln x}\cdot x^y\ln x$$

$$=x^y+x^y=2x^y=2z.$$

例 4 对于例 1 中的关系式$PV=RT$，求证：

$$\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial P}=-1.$$

证 由$P=\frac{RT}{V}$，得$\frac{\partial P}{\partial V}=-\frac{RT}{V^2}$,

由$V=\frac{RT}{P}$，得$\frac{\partial V}{\partial T}=\frac{R}{P}$,

由$T=\frac{1}{R}PV$，得$\frac{\partial T}{\partial P}=\frac{1}{R}V$,

所以$\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial P}=-\frac{RT}{V^2}\cdot\frac{R}{P}\cdot\frac{V}{R}$

$$=-\frac{RT}{PV}=-1.$$

此例说明，偏导数的记号是一个整体，不能把它看作一个分式。

例 5 求

$$g(x,\ y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

的偏导数$g_x(0,\ 0)$，$g_y(0,\ 0)$。

解 $g_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(0+\Delta x, 0) - g(0, 0)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

同样可得：$g_y(0, 0) = 0$。

因此，$g(x, y)$在点$(0, 0)$的两个偏导数都存在，但在上节中，我们已知$g(x, y)$在点$(0, 0)$并不连续。

一般地，函数$z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)的偏导数都存在，并不能保证函数在该点连续，这是与一元函数不同的地方。

3.二元函数偏导数的几何意义

在空间直角坐标系中，函数$z = f(x, y)$表示一个曲面，如果我们把$f(x, y)$中的y看作常量，则当$y = y_0$时，曲面$z = f(x, y)$与平面$y = y_0$的交线方程为

$$\begin{cases} z = f(x, y), \\ y = y_0; \end{cases}$$

交线在点$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$的切线对x轴的斜率为

$$\operatorname{tg}\alpha = f_x(x_0, y_0).$$

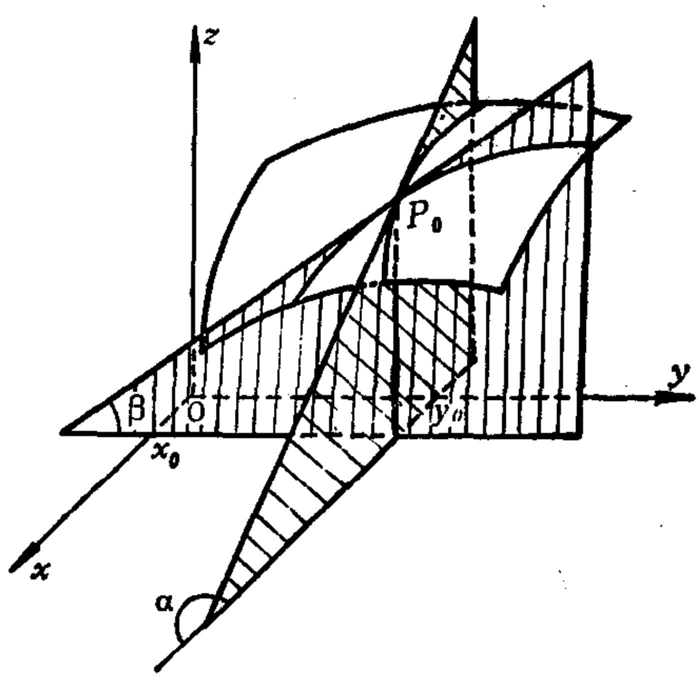


图 8—4

同理，曲线$\begin{cases} z = f(x, y), \\ x = x_0 \end{cases}$在点$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$的切线对$y$轴的斜率为

$$\operatorname{tg}\beta = f_y(x_0, y_0).$$

因此，偏导数$f_x(x_0, y_0)$（或$f_y(x_0, y_0)$）的几何意义是曲面$z = f(x, y)$被平面$y = y_0$（或$x = x_0$）所截得的曲线在点$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$处的切线对x轴（或y轴）的斜率。

二、二阶偏导数

函数$z = f(x, y)$的偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x, y)$$

仍然还是x、y的二元函数，如果这两个函数关于自变量x和y的偏导数也存在，则称它们的偏导数为函数$z = f(x, y)$的**二阶偏导数**。相对于二阶偏导数而言，$f_x(x, y)$、$f_y(x, y)$叫做一阶偏导数。

依照对变量求导的次序不同，二阶偏导数有下列四个：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y).$$

其中，$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y)$、$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x, y)$ 称为二阶混合偏导数。$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$表示先对 x 求偏导数，再对 y 求偏导数；$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$的求导次序则与之相反。

例 6 求函数 $z = x^3 y - 3x^2 y^3 + 5$ 的二阶偏导数。

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y - 6xy^3$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 - 9x^2 y^2$.

从而 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy - 6y^3$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3x^2 - 18xy^2$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 3x^2 - 18xy^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -18x^2 y$.

本题中

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 3x^2 - 18xy^2$，这不是偶然的，可以证明：

如果函数$z = f(x, y)$的两个二阶混合偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$在点$(x, y)$处都连续，则这两个二阶混合偏导数在这点必相等（证略）。即二阶混合偏导数在连续的条件下，与求导的次序无关。

例 7 验证函数 $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

证 因为 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$，

从而 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

所以 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$=0.$$

方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 叫做**拉普拉斯方程**，它是数学物理方程中一个很重要的方程。

习　题　8—3(1)

1. 求函数 $z=e^{-x}\sin(x+2y)$ 在点 $(0,\frac{\pi}{4})$ 处的两个一阶偏导数.

2. 求下列函数的偏导数：

(1) $z=\frac{\cos x^2}{y}$；　　(2) $z=\sqrt{\ln(xy)}$；

(3) $z=xy\sqrt{R^2-x^2-y^2}$；　　(4) $z=(1+xy)^{x+y}$；

(5) $z=\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3. 已知函数 $f(x, y)=x+y+(y-1)\arcsin\sqrt[3]{\frac{x}{y}}$，求$f_x(x, 1)$，$f_x(0, 1)$，$f_y(0, 1)$.

4. 证明：函数 $z=xe^{\frac{y}{x}}$满足方程

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z.$$

5. 证明：函数 $z=e^y\arcsin(x-y)$

满足方程

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=z.$$

6. 曲线 $\begin{cases} z=\dfrac{x^2+y^2}{4}, \\ y=4 \end{cases}$ 在点(2,4,5)的切线与 ox 轴的夹角等于多少?

7. 求函数$f(x, y)=x^2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-y^2\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$的一阶与二阶偏导数.

8. 证明：$z=\ln(e^x+e^y)$满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0.$$

9. 设$(x+y)z=\varphi(x)+\psi(y)$，

求证：$(x+y)(z_x-z_y)=\varphi'(x)-\psi'(y)$

三、全　微　分

一元函数的微分，是函数增量的线性主部，用函数的微分来近似地代替函数的增量，所差仅仅是一个比Δx高阶的无穷小。对于多元函数，也有类似情形。

设二元函数 $z=f(x,y)$，当自变量分别有增量 Δx 和 Δy 时，称

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)$$

为 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 对应于增量 Δx、Δy 的**全增量**，记为 Δz，即

$$\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y).$$

全增量的计算，一般都比较复杂。与一元函数的情形一样，我们希望用自变量的增量 Δx、Δy 的线性函数来近似代替函数的全增量 Δz。

例如，有长为 x、宽为 y 的矩形铁片，加热后长增加 Δx，宽增加 Δy（图 8—5），这时铁片面积相应增加 Δz。

$$\Delta z=(x+\Delta x)(y+\Delta y)-xy$$

$$=y\Delta x+x\Delta y+\Delta x\Delta y.$$

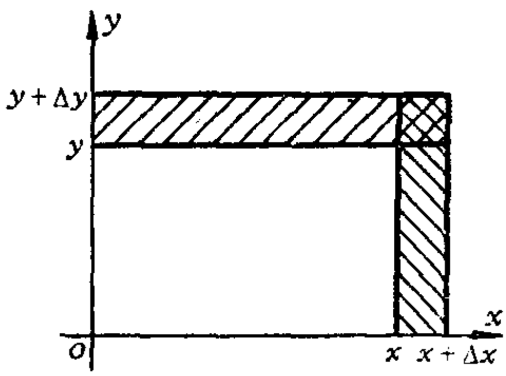


图 8—5

全增量 Δz 由三部分组成，当 Δx 和 Δy 很小时，这三部分都很小，$\Delta x\cdot\Delta y$ 更小，前面部分是关于 Δx、Δy 的线性函数，记 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，当 $\rho\to 0$ 时，最后一项 $\Delta x\cdot\Delta y$ 是比 ρ 高阶的无穷小。所以，若用 $y\cdot\Delta x+x\cdot\Delta y$ 来近似代替面积增量 Δz，所差仅仅是一个比 ρ 高阶的无穷小，可以忽略不计，我们称 $y\Delta x+x\Delta y$ 是面积增量的线性主部。

1.全微分的定义

定义 如果二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全增量 Δz 可表示为：

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \omega,$$

其中A、B是不依赖于Δx和Δy的常数，ω是当$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$时比$\rho$高阶的无穷小，则称$A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$为函数$z = f(x, y)$在点$(x, y)$处的**全微分**，记作$dz$或$df(x, y)$，即

$$dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y.$$

这时，也称函数在点(x, y)**可微**。

由定义可知，用全微分近似代替二元函数的增量：$\Delta z \approx dz$所产生的误差$\Delta z - dz = \omega$是当$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$时比$\rho$高阶的无穷小。而且当$A$、$B$不同时为零时，全微分$dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$是全增量的**线性主部**。

A、B是怎样的两个常数呢？从上例可以看出$A = y$，$B = x$，恰好是面积函数$z = xy$在点(x, y)的两个偏导数，即$A = \frac{\partial z}{\partial x}$，$B = \frac{\partial z}{\partial y}$，一般地，对可微函数来说此结果都是成立的，下面将给出它的证明。

2.可微与偏导数的关系

定理1 如果二元函数$z = f(x, y)$在点(x, y)可微，则函数$z = f(x, y)$在点(x, y)的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$必存在，而且$A = \frac{\partial z}{\partial x}$，$B = \frac{\partial z}{\partial y}$。

证 $z = f(x, y)$在点(x, y)可微，所以全增量可以表示成：

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \omega, \qquad (1)$$

其中ω是当$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$时比$\rho$高阶的无穷小。

因为(1)式要求对任意Δx、Δy都成立，则当$\Delta y=0$时也应成立，这时

$$\Delta z=f(x+\Delta x,\ y)-f(x,\ y)=\Delta_x z,$$

$\rho=|\Delta x|$，所以(1)式成为：

$$\Delta_x z=A\cdot\Delta x+\omega.$$

上式两端除以Δx，并注意到当$\Delta x\to 0$时，$\rho=|\Delta x|\to 0$，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\omega}{\Delta x}=0,$$

从而得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{A\cdot\Delta x+\omega}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(A+\frac{\omega}{\Delta x}\right)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}A+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\omega}{\Delta x}=A,$$

即 $$\frac{\partial z}{\partial x}=A.$$

同理可证 $$\frac{\partial z}{\partial y}=B.$$

由此可知：当$z=f(x,\ y)$在点$(x,\ y)$可微时，必有$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$.

象一元函数一样，规定自变量的微分就等于自变量的增量，即$dx=\Delta x$，$dy=\Delta y$，于是全微分便可写成

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

我们知道在一元函数中，可微与可导是等阶的，但在多元函数中就不能这么说了。

例 8 考察函数

$$z=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在点（0，0）处的两个偏导数是否存在？在该点是否可微？

解 因为 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta x\cdot 0}{\sqrt{(\Delta x)^2+0}}-0}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,$$

同理可得 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=0$， 所以，函数 $z=f(x,y)$ 在点（0，0）的两个偏导数都存在。

但是，函数在点（0，0）处的全增量为

$$\Delta z=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)$$

$$=\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}},$$

令$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，

记 $$dz^*=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}\cdot dx+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}\cdot dy,$$

因为$$\frac{\Delta z-dz^*}{\rho}=\frac{\dfrac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2},$$

如果ρ按$\Delta x=\Delta y$的方式趋于0，则有

$$\lim_{\rho\to0}\frac{\Delta z-dz^*}{\rho}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{(\Delta x)^2}{2(\Delta x)^2}=\frac{1}{2}\neq0.$$

这说明$\Delta z-dz^*$当$\rho\to0$时并不是比ρ高阶的无穷小，所以dz^*不是$z=f(x,y)$在点(0，0)的全微分，即$z=f(x,y)$在点(0，0)不可微。

这个例子说明，函数的偏导数存在，并不保证有全微分，这是与一元函数的不同之处。但是，如果二元函数的偏导数都存在，而且都连续，则函数必可微。

定理2 如果二元函数$z=f(x,y)$在点(x,y)有连续的一阶偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$，则函数$z=f(x,y)$在点$(x,y)$可微。证明从略。

全微分的概念及存在条件，可以推广到二元以上的函数。

例9 求函数$z=x^2y^2$在点(2，-1)处当$\Delta x=0.02$，$\Delta y=-0.01$时的全增量和全微分。

解 全增量$\Delta z=(2+0.02)^2\cdot(-1-0.01)^2-2^2\cdot(-1)^2$
$=0.16241604$，

又因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^2$， $\frac{\partial z}{\partial y}=2x^2y$，

所以$\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$在（2，－1）处连续，故函数$z=x^2y^2$在该点可微。从而在点（2，－1）处当$\Delta x=0.02$，$\Delta y=-0.01$时函数的全微分为

$$dz=2xy^2\Big|_{\substack{x=2\\y=-1}}\cdot(0.02)+2x^2y\Big|_{\substack{x=2\\y=-1}}\cdot(-0.01)$$

$$=0.08+0.08=0.16.$$

例10 单摆运动的周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\quad,$$

其中l是摆长，g为重力加速度，求dT。

解 $$dT=\frac{\partial T}{\partial l}dl+\frac{\partial T}{\partial g}dg$$

$$=\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{l}}dl+2\pi\sqrt{l}\cdot\left(-\frac{1}{2}\quad\frac{1}{\sqrt{g^3}}\right)dg$$

$$=\pi\left(\frac{1}{\sqrt{lg}}dl-\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{g^3}}dg\right).$$

习 题 8—3(2)

1．求下列函数的全微分：

(1) $z=\dfrac{x}{y}$；　　(2) $u=\sqrt{x^2+y^2}$；

(3) $z=\mathrm{arctg}(xy)$；　　(4) $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$；

(5) $x^{yz}=x$。

2．求函数 $z=\frac{x}{y}$，在点（2，1）处当 $\Delta x=0.1$，$\Delta y=-0.2$ 时全微分的值.

3．已知边长 $x=6$ m与 $y=8$ m的矩形，求当 x 边增加2 cm，y 边减少5 cm时，此矩形对角线和面积各变化多少？

第四节　多元函数微分法

一、复合函数微分法

设函数 $z=f(u,v)$ 通过中间变量

$$u=\varphi(x,y),\quad v=\psi(x,y)$$

而成为 x、y 的**复合函数** $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$，下面建立多元复合函数求偏导数公式.

定理　设 $u=\varphi(x,y)$ 和 $v=\psi(x,y)$ 在点 (x,y) 存在偏导数，$z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 有连续偏导数，则复合函数

$$z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$$

在点 (x,y) 的偏导数存在，且

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.\end{aligned}\tag{1}$$

证　给 x 以增量 Δx，令 y 的值保持不变，则 u、v 得到相应增量 Δu 和 Δv，从而函数 z 也得到相应的增量 Δz，因 $z=f(u,v)$ 在点 (u,v) 有连续的偏导数，所以

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\Delta u+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\Delta v+\omega,\tag{2}$$

其中ω是当$\rho=\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}\to 0$时比$\rho$高阶的无穷小，即

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\omega}{\rho}=0.$$

因为u、v对x的偏导数存在，故u、v都是单变量x的连续函数．所以，当$\Delta x\to 0$时，有$\Delta u\to 0$，$\Delta v\to 0$．因而有$\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}\to 0$，即$\rho\to 0$．

将(2)式的两边除以Δx，得

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{\omega}{\Delta x}. \quad (3)$$

令$\Delta x\to 0$，

则 $$\frac{\Delta u}{\Delta x}\to\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\Delta v}{\Delta x}\to\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\omega}{\Delta x}=\frac{\omega}{\rho}\cdot\frac{\rho}{\Delta x}=\frac{\omega}{\rho}\cdot\sqrt{\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)^2}\to 0,$$

由(3)便可证得(1)的第一式．

类似地可证(1)的第二式．

公式(1)可以推广至中间变量或自变量多于两个的情形．如对三个中间变量u、v、w，两个自变量x、y的情形，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x},\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}.\end{aligned} \quad (4)$$

求复合函数的偏导数有如下的规律：

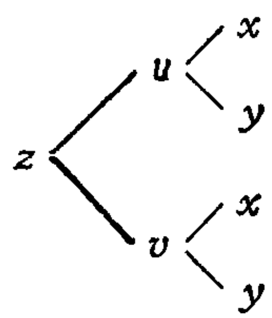
1° 复合函数的自变量有几个，它的偏导数就有几个．如公式(1)、(4)都只涉及两个自变量，所以就各有两个偏导数

$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$；

2° 对某一个自变量，如对x求导时，偏导数所具有的项数等于与x有关的中间变量的个数。如公式(1)有两个中间变量，偏导数由两项组成；公式(4)有三个中间变量，偏导数由三项组成；

3° 偏导数中的各项均是两个因子的乘积。如公式(1)或(4)中，每项均为两个因子的乘积，第一个因子是原来函数对某一中间变量的偏导数，第二个因子是该中间变量对所指定的自变量的偏导数。

为搞清复合关系并帮助记忆，公式(1)可用下面的函数关系图记忆。从左至右按连线求偏导数后相乘，再分线相加。



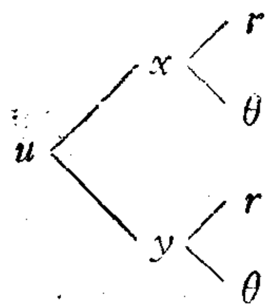
，

如对x求导时，先要注意与x有关的中间变量是几个，公式(1)有两个中间变量，每个偏导数公式由两项组成，每项都是两个因子的乘积，所以，公式(1)中$\frac{\partial z}{\partial x}$的右边是

$$\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}.$$

例 1 求函数$u=u(r\cos\theta, r\sin\theta)$的一阶偏导数，其中函数$u$有一阶连续的偏导数。

解 设$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，则$u=u(x, y)$是r、θ的复合函数，由公式(1)



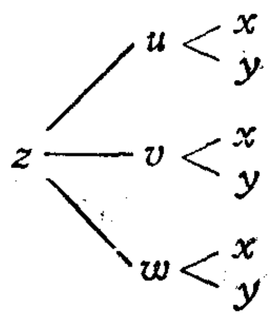
$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$=-\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta.$$

公式(4)的函数关系图为



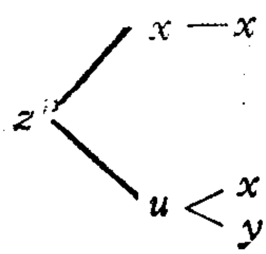
每个偏导数应由三项组成.

特殊地，当函数表达式中，中间变量与自变量并存时，不妨将并存的那个自变量临时看作中间变量，而套用上面的公式.

假定 $z=f(x,u)$，$u=\varphi(x,y)$ 都满足求导所需要的条件（以后，对任意函数求导时，我们也总假定所给的函数满足求导所需要的条件），求一阶偏导数，则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \varphi_x(x, y)$$



$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

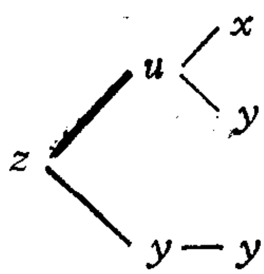
$$= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \varphi_y(x, y).$$

第一式中$\frac{\partial z}{\partial x}$与$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$是不同的，左端的$\frac{\partial z}{\partial x}$表示在$z = f[x, \varphi(x, y)]$中，将$y$视为常数时对$x$的偏导数；右端$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$表示在函数$z = f(x, u)$中把$u$看做常数时，对$x$的偏导数，二者不可混淆。

例 2 若函数$z = f(u, y) = y + 2u$，$u = x^2 - y^2$，

试验证 $$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = x.$$

解 $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 2 \cdot 2x = 4x,$$



$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$= 2 \cdot (-2y) + 1$$

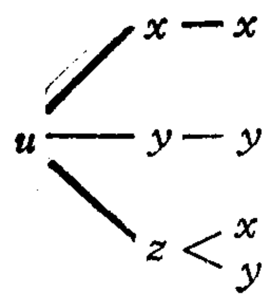
$$= -4y + 1.$$

这里，$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 1$是将$z = f(u, y) = y + 2u$中的$u$看作常数时，函数$f(u, y)$对$y$的偏导数，与等式左边的$\frac{\partial z}{\partial y}$不同。

所以 $$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = y \cdot 4x + x \cdot (-4y + 1) = x,$$

即 $$y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=x.$$

例 3 设 $u=f(x,\ y,z)=(x-y)^z$,
$z=x^2+y^2$,



求 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$.

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$=z(x-y)^{z-1}+(x-y)^z[\ln(x-y)]\cdot 2x$$

$$=(x-y)^{z-1}[z+2x(x-y)\ln(x-y)],$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$=-z(x-y)^{z-1}+(x-y)^z[\ln(x-y)]2y$$

$$=(x-y)^{z-1}[-z+2y(x-y)\ln(x-y)].$$

例 4 设 $z=xy+xF(u)$, 而 $u=\frac{y}{x}$, $F(u)$ 为可导函数，证明

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z+xy.$$

证 因为 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$=y+F(u)+x\cdot\frac{dF}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$$

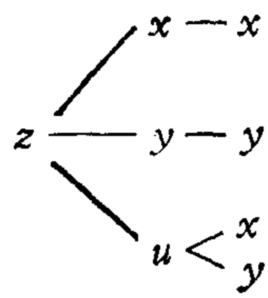
$$=y+F(u)+x\cdot F'(u)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$=y+F(u)-\frac{y}{x}F'(u),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$= x + x \cdot \frac{dF}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$= x + F'(u),$$



所以 $$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$= x[y + F(u) - \frac{y}{x}F'(u)] + y[x + F'(u)]$$

$$= xy + xF(u) + xy$$

$$= z + xy,$$

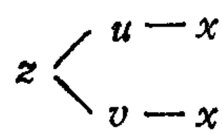
即 $$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z + xy.$$

更特殊地，对中间变量虽有多个，但自变量只有一个的情形，如 $z = f(u, v)$，$u = \varphi(x)$，$v = \psi(x)$，那么，复合函数也相应地变为 x 的一元函数

$$z = f[\varphi(x), \psi(x)],$$

这时，公式(1)变为

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}. \quad (5)$$



这里由于函数 z、u 与 v 都是一元函数，因此，公式(1)中的 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial v}{\partial x}$ 里的“∂”都写成了“d”。这样的导数 $\frac{dz}{dx}$ 称为**全导数**。

例 5 已知 $z = x^2 - y^2$，$x = \sin t$，$y = \cos t$，求 $\frac{dz}{dt}$。

解 x、y是中间变量，z是t的复合函数

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$=2x\cos t+(-2y)(-\sin t)$$

$$=2\sin t\cos t+2\cos t\sin t=2\sin 2t.$$

例6 设$z=x\varphi(x+y)+y\psi(x+y)$，其中$\varphi$、$\psi$有二阶连续偏导数，证明关系式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

成立。

证 由φ、ψ有二阶连续偏导数，可知$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$均连续，故

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$$

令$x+y=u$，则$z=x\varphi(u)+y\psi(u)$，

将z对x及y求导，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi+x\varphi_u\cdot 1+y\psi_u\cdot 1$$

及 $$\frac{\partial z}{\partial y}=x\varphi_u\cdot 1+\psi+y\psi_u\cdot 1,$$

两式相减得

$$\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi-\psi.$$

两端分别再对x及y求导，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\varphi_u-\psi_u$$

及 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\varphi_u-\psi_u,$$

两式相减，即得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

习　题　8—4(1)

1．求下列各题的一阶偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$：

(1) $z=\frac{\cos u}{v}$，　$u=\frac{y}{x}$，　$v=x^2-y^2$；

(2) $z=\operatorname{arctg}(u+v)$，$u=2x-y^2$，$v=x^2y$

(3) $z=e^{uv}$，$u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，$v=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$；

(4) $z=uv$，$x=u+v$，$y=3u+2v$；

(5) $z=f(ax, by)$，a、b 为常量；

(6) $z=f(x^2-y^2)$．

2．设 $z=\arccos(x-y)$，而 $x=3t$，$y=4t^3$，求 $\frac{dz}{dt}$．

3．设 $u=e^x(y-z)$，$x=t$，$y=\sin t$，$z=\cos t$，求 $\frac{du}{dt}$．

4．若 $f(x, y)=f(x(s, t), y(s, t))$，且 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(2,0)}=10$，　$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(2,0)}=-5$，试求：

$\frac{\partial}{\partial s}f(se^t, t-s^2)$，$\frac{\partial}{\partial t}f(se^t, t-s^2)$ 在 $s=2$，$t=0$ 的值．

5．求$u=f\left(x, \frac{x}{y}\right)$的一阶偏导数.

6．设$u=\varphi(x^2+y^2)$，求证：

$$x\frac{\partial u}{\partial y}-y\frac{\partial u}{\partial x}=0.$$

7．若函数$z=y+F(u)$，$u=x^2-y^2$，计算

$$y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}.$$

8．设$z=yf(x^2-y^2)$，其中$f(x^2-y^2)$为可微函数，证明：

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}.$$

二、隐函数微分法

在一定的条件下，由方程$F(x, y, z)=0$所确定的二元函数$z=f(x, y)$称为x、y的**隐函数**。下面讨论隐函数的求导法。

假设由方程

$$F(x, y, z)=0 \tag{6}$$

确定z是x、y的函数

$$z=f(x, y),$$

把$z=f(x, y)$代入(6)，得到关于x、y的恒等式$F[x, y, f(x, y)]\equiv 0$，再设F_x、F_y、F_z连续，且$F_z\neq 0$，两端对x、y求偏导数，得

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

和

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

从而
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}. \tag{7}$$

例 7 已知$x^2+y^2+z^2-4z=0$确定隐函数z，求$\frac{\partial z}{\partial x}$. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 这里$F(x, y, z)=x^2+y^2+z^2-4z$,
$$F_x=2x, \qquad F_z=2z-4,$$
当$z\neq 2$时，由公式(7)得
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x}{2z-4}=\frac{x}{2-z}.$$
再一次对x求偏导数，得
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(2-z)+x\frac{\partial z}{\partial x}}{(2-z)^2}$$
$$=\frac{2-z+x\cdot\left(\frac{x}{2-z}\right)}{(2-z)^2}$$
$$=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}.$$

例 8 设$F(x-y, y-z)=0$确定隐函数$z=z(x, y)$。求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。

解 设$u=x-y$，$v=y-z$，则$F(u, v)=0$。在方程两端对x求偏导数，得

$$\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

即 $$F_u+F_v\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0,$$

所以 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_u}{F_v}.$$

方程两端对y求偏导数，得

$$\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

即 $$F_u(-1)+F_v\left(1-\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0,$$

所以 $$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F_v-F_u}{F_v}.$$

习 题 8—4 (2)

1．已知$x^3+y^3-9=0$，试在点($\sqrt[3]{9}$，0)处，求$\dfrac{dx}{dy}$.

2．对下列方程确定的函数$z=f(x、y)$，求它的所有一阶偏导数：

(1) $x+y+z=e^{x+y+z}$;

(2) $x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z=0$;

(3) $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$;　　(4) $e^z-xyz=0$.

3．设方程$F(x, y, z)=0$可把任一变量确定为其余两个变量的函数，证明：

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1.$$

4．设$2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，

证明：$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$．

5．求由方程 $2xz-2xyz+\ln(xyz)=0$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$ 的全微分。

第五节　多元函数微分法的应用

一、偏导数的几何应用

1.空间曲线的切线与法平面

给定空间曲线C的参数方程为：

$x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$，

其中$x(t)$、$y(t)$、$z(t)$均为可微函数，且导数$x'(t)$、$y'(t)$、$z'(t)$不同时为零。

现在考虑当$t=t_0$时，在曲线上对应点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处的切线。这里$x_0=x(t_0)$，$y_0=y(t_0)$，$z_0=z(t_0)$。

在曲线C上任取点M_0附近的一个动点$M(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y,\ z_0+\Delta z)$（图8—6），则向量$\overrightarrow{M_0M}$表示过点$M_0$的割线的方向向量，当点$M$沿曲线$C$趋近于点$M_0$时，割线$M_0M$的极限位置$M_0T$就是曲线$C$在点$M_0$处的切线。由空间解析几何可知，曲线的割线$M_0M$的方程是

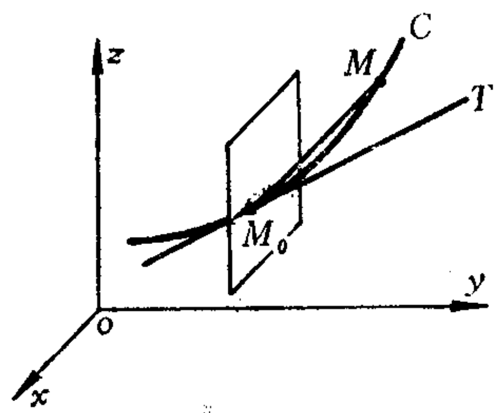


图　8—6

$$\frac{x-x_0}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{\Delta y}=\frac{z-z_0}{\Delta z}.$$

用Δt遍除割线方程的分母，得

$$\frac{x-x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{y-y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{z-z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}},$$

当$M\to M_0$时，有$\Delta t\to 0$，对上式取极限，得曲线在点M_0处的切线方程

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)},$$

或简写为$\dfrac{x-x_0}{x_0'}=\dfrac{y-y_0}{y_0'}=\dfrac{z-z_0}{z_0'}$， (1)

这里 x_0'、y_0'、z_0'不全为零，若分母有一为零时，约定相应的分子亦为零。

由此可得曲线在点M_0处的切线的方向向量为$\{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$。

过曲线C上一点M_0而与切线垂直的平面，叫做曲线在点M_0的**法平面**。显然，法平面的法向量就是$\{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$。

所以，曲线C在点$M_0(x_0, y_0, z_0)$处法平面方程为

$$x_0'(x-x_0)+y_0'(y-y_0)+z_0'(z-z_0)=0. \quad (2)$$

例1 求曲线 $x=t^2$, $y=1-t$, $z=t^3$在点（1, 0, 1）处的切线与法平面方程。

解 $x'=2t$, $y'=-1$, $z'=3t^2$,

对应于点（1，0，1）的参数$t=1$，故有

$x_0'=2t|_{t=1}=2$，$y_0'=-1$，$z_0'=3t^2|_{t=1}=3$，所以，过点（1，0，1）的切线方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{3},$$

法平面方程为：$2(x-1)-y+3(z-1)=0$，

即　$2x-y+3z-5=0$。

例 2　求曲线$y=x$，$z=x^2$在点$M_0(1,1,1)$的切线与法平面方程。

解　把x看作参数，则曲线的参数方程为：

$$\begin{cases} x=x, \\ y=x, \\ z=x^2. \end{cases}$$

那么它在点M_0的切线的方向向量$\overrightarrow{M_0T}=\{1,1,2\}$，所以过点$M_0$的切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2},$$

法平面方程为

$$1\cdot(x-1)+1\cdot(y-1)+2\cdot(z-1)=0,$$

即　$x+y+2z-4=0$。

例 3　设曲面Σ方程为$F(x,y,z)=0$，M_0为Σ上一点，又设F_x、F_y、F_z在点M_0连续且不同时为零。试证：曲面上过点M_0的任何曲线的切线都在同一平面上。

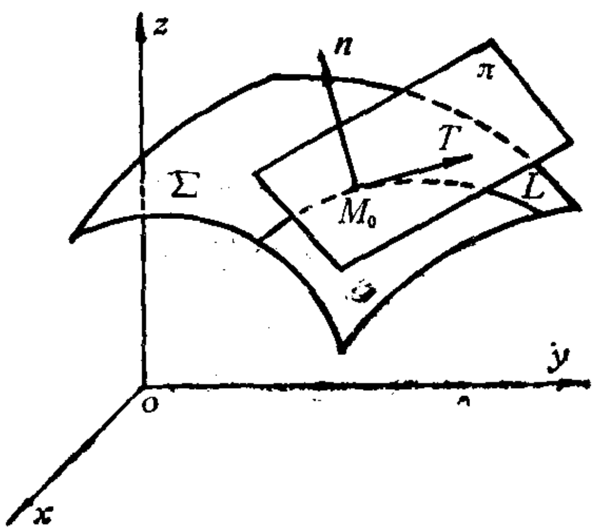


图 8—7

证　因为$M_0(x_0, y_0, z_0)$为曲面上一点，函数$F(x,y,z)$在点

M_0的偏导数F_x、F_y、F_z连续，且至少有一不为零，在曲面上通过点M_0任作一曲线L（图8—7），并设曲线L的参数方程是：

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t). \tag{3}$$

设点M_0对应于参数$t=t_0$，则曲线在点M_0的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{x_0'}=\frac{y-y_0}{y_0'}=\frac{z-z_0}{z_0'}.$$

因为，曲线(3)完全在曲面Σ上，所以，有恒等式

$$F[x(t),\ y(t),\ z(t)]\equiv 0,$$

两端对t求导，并令$t=t_0$便得：

$$F_x(x_0,\ y_0,\ z_0)x_0'+F_y(x_0,\ y_0,\ z_0)y_0' +F_z(x_0,\ y_0,\ z_0)z_0'=0,$$

因为切线的方向向量$\boldsymbol{S}=\{x_0',\ y_0',\ z_0'\}$，所以向量$\boldsymbol{n}=\{F_x(x_0,\ y_0,\ z_0),F_y(x_0,\ y_0,\ z_0),\ F_z(x_0,\ y_0,\ z_0)\}$与向量$\boldsymbol{S}$垂直，由于曲线(3)是曲面上过点$M_0$的任意一条曲线，所以，在曲面上过点$M_0$的一切曲线的切线都在以$\boldsymbol{n}$为法向量的同一平面上。

2. **曲面的切平面与法线**

由例8可知，曲面上过点M_0的任一曲线的切线都在同一平面上，称该平面为曲面在点M_0的**切平面**，过点M_0而与切平面垂直的直线称为曲面在点M_0的**法线**，下面求曲面上点$M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$处的切平面方程与法线方程。

(1) 曲面Σ的方程为$F(x,\ y,\ z)=0$，由例3得曲面Σ在点$M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$的切平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\{F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\}. \tag{4}$$

所以曲面在点M_0的切平面的方程是

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0)$$
$$+ F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0, \qquad (5)$$

曲面Σ在点M_0处法线方程为

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)}$$
$$= \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)} \qquad (6)$$

（2）曲面的方程由显式$z = f(x, y)$给出，令$F(x, y, z) = f(x, y) - z$，于是$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$。从而

$$F_x = f_x, \quad F_y = f_y, \quad F_z = -1.$$

故曲面在点M_0处切平面方程为

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

法线方程为

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \qquad (7)$$

例 4　求椭球面$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{2} = 1$在点（1，1，1）处的切平面方程与法线方程.

解　设$F(x, y, z) = \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{2} - 1$，

则$F_x = \frac{x}{3}$，$F_y = \frac{2}{3}y$，$F_z = z$，　$F_x(1, 1, 1) = \frac{1}{3}$，

$F_y(1, 1, 1) = \frac{2}{3}$，$F_z(1, 1, 1) = 1$.

所以，在点（1，1，1）处椭球面的切平面方程为

$$\frac{1}{3}(x-1)+\frac{2}{3}(y-1)+(z-1)=0,$$

即 $$x+2y+3z=6.$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}.$$

例 5 求抛物面 $z=x^2+y^2$ 在点(1, 2, 5)处的切平面与法线方程。

解 因为 $f(x, y)=x^2+y^2$,

故有 $$f_x=2x, \qquad f_y=2y,$$

$$f_x(1, 2)=2, \; f_y(1, 2)=4.$$

所以，切平面方程为

$$2(x-1)+4(y-2)-(z-5)=0,$$

即 $$2x+4y-z=5.$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-5}{-1}.$$

习 题 8－5(1)

1．求曲线 $x=e^t\sin 2t$, $y=e^t\cos 2t$, $z=2e^t$ 在点 $t=0$ 处的切线方程和法平面方程.

2．求上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 在点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 处的切平面及法线方程.

3．求 $z=\sin x\cdot\cos y$ 在点 $M\left(\frac{\pi}{4}, \frac{2}{3}\pi, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ 处的切平面及

法线方程，

4．求曲面$x^2+2y^2+3z^2=21$上平行于平面$x+4y+6z=0$的切平面方程.

5．试求

（1）$z=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x^2+y^2)^3}$在点$(x, y, z)$的法向量$\mathbf{n}$;

（2）$\mathbf{n}$与z轴夹角的余弦$\cos\gamma$.

二、二元函数的极值及其求法

1.二元函数极值的概念与求法

多元函数的极值，可以用与一元函数类似的方法来处理，下面仅就二元函数进行讨论。

定义 设函数$z=f(x, y)$在点(x_0, y_0)的邻域内有定义，对于该邻域内异于(x_0, y_0)的点(x, y)，如果都有$f(x, y)<f(x_0, y_0)$，则称$f(x_0, y_0)$为函数的**极大值**；如果都有$f(x, y)>f(x_0, y_0)$，则称$f(x_0, y_0)$为函数的**极小值**．极大值、极小值统称为**极值**．使函数取得极值的点称为**极值点**（图8—8(1)，图8—8(2)）．

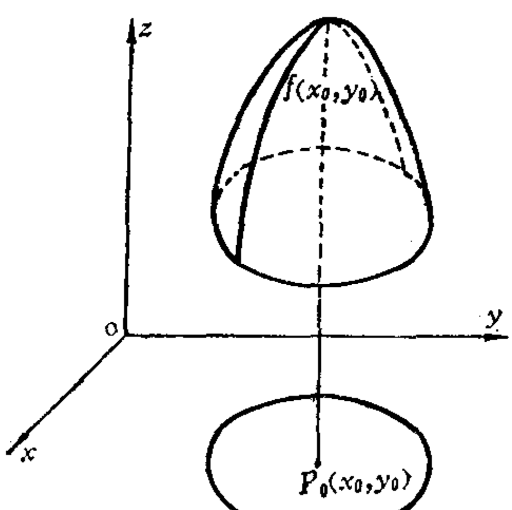


图8—8（1）

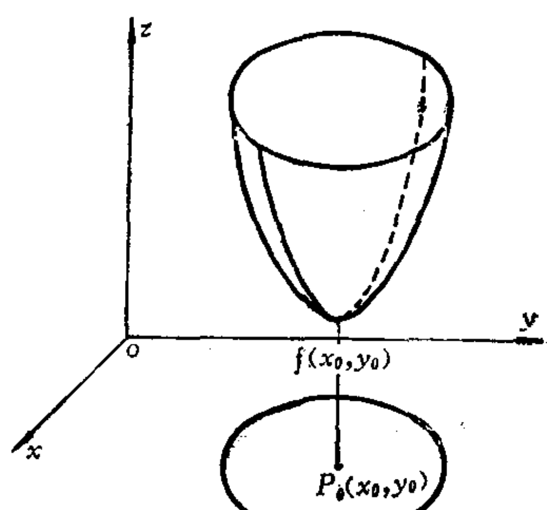


图8—8（2）

例 6 函数$z=1-x^2-y^2$是开口向下的旋转抛物面，点（0，0，1）是它的顶点，显然在点（0，0）的任一邻域内异于（0，0）的点的函数值都小于1，所以函数在点（0，0）处取得极大值 $z=1$.

例 7 函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$是开口向上的圆锥面，点(0，0，0）是它的顶点，在（0，0）的邻域内异于（0，0）的点的函数值都大于0，所以函数在点（0，0）处取得极小值 $z=0$.

在一般情况下，极值不是那么容易看出的，必须给出判定极值的方法。如例6（图8—9）中，曲面与平面$y=0$的交线$\overset{\frown}{AM_0B}$是一条 zx 面上的曲线：$z=1-x^2$，它经过点M_0，曲面与平面$x=0$的交线$\overset{\frown}{CM_0D}$是一条yz面上的曲线：$z=1-y^2$，也经过点M_0，显然点M_0既是曲面$z=1-x^2-y^2$的最高点，也是曲线$\overset{\frown}{AM_0B}$和$\overset{\frown}{CM_0D}$的最高点，故由一元函数极值的必要条件可知$z_x(0,0)=0$，$z_y(0,0)=0$都成立.这说明二元函数的极值问题可以化为一元函数来处理，于是有

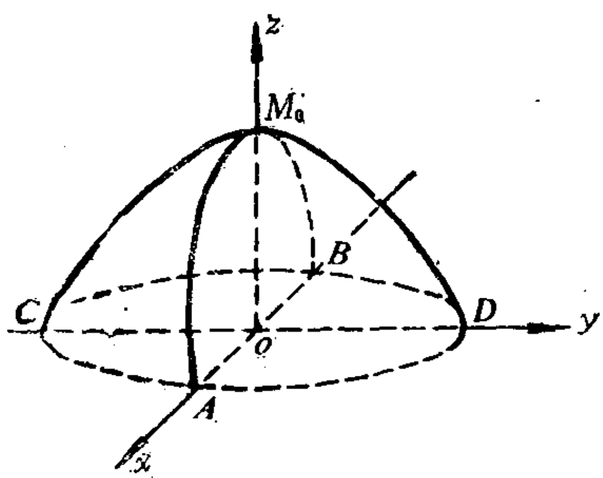


图 8—9

定理 1 （极值存在的必要条件）

设函数 $z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的偏导数都存在，且在点P_0处有极值，则在该点的偏导数必为零，即

$$\begin{cases} f_x(x_0,\ y_0)=0, \\ f_y(x_0,\ y_0)=0. \end{cases} \tag{8}$$

同时满足$f_x(x, y)=0$，$f_y(x, y)=0$的点(x_0, y_0)称为函数$f(x, y)$的**驻点**。

于是要求函数$z=f(x, y)$的极值，通常只要考虑满足方程组(8)的那些点(x_0, y_0)，即极值点可在驻点中去寻找. 但要注意在驻点处函数也可能不取极值.

定理 2 （极值存在的充分条件）

设函数$z=f(x, y)$在点$P_0(x_0, y_0)$的邻域内有直到二阶的连续偏导数，又$f_x(x_0, y_0)=0$，$f_y(x_0, y_0)=0$。令

$$A=f_{xx}(x_0, y_0),\quad B=f_{xy}(x_0, y_0),$$
$$C=f_{yy}(x_0, y_0),\quad \Delta=B^2-AC,$$

则

(1) 当$\Delta<0$，且$\begin{cases} A<0\text{时}, f(x_0, y_0)\text{是极大值}, \\ A>0\text{时}, f(x_0, y_0)\text{是极小值}; \end{cases}$

(2) 当$\Delta>0$时，$f(x_0, y_0)$不是极值；

(3) 当$\Delta=0$时，函数在点(x_0, y_0)可能有极值，也可能没有极值。

证明从略.

综上所述，可得具有二阶连续偏导数的函数$z=f(x, y)$的极值求法如下：

(1) 由$\begin{cases} f_x(x, y)=0, \\ f_y(x, y)=0 \end{cases}$求出一切驻点；

(2) 求二阶偏导数f_{xx}，f_{xy}，f_{yy}；

(3) 求出驻点处二阶偏导数的值A，B和C，算出$\Delta=B^2-AC$的符号；据此判定出极值点，并求出极值。

例 8 求函数$f(x, y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$的极值。

解

(1) 解方程组$\begin{cases} f_x(x, y) = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ f_y(x, y) = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases}$ 求得驻点(1, 0), (1, 2), (-3, 0), (-3, 2).

(2) 求二阶偏导数:

$f_{xx}(x, y) = 6x + 6$, $f_{xy}(x, y) = 0$,

$f_{yy}(x, y) = -6y + 6$.

(3) 列表判定:

驻点 (x_0, y_0)	A	B	C	$\Delta = B^2 - AC$ 的符号	结论
(1, 0)	12	0	6	−	$f(1, 0) = -5$是极小值
(1, 2)	12	0	−6	+	$f(1, 2)$不是极值
(−3, 0)	−12	0	6	+	$f(-3, 0)$不是极值
(−3, 2)	−12	0	−6	−	$f(-3, 2) = 31$是极大值

另外，极值也可能在函数连续而偏导数不存在的点上取得，这部分内容不再讨论了.

2. 最大值与最小值

可以利用函数的极值来求函数的最大值和最小值。与一元函数类似，我们已经知道，如果函数在有界闭区域D上连续，则$f(x, y)$一定在D上取得最大值和最小值，这种使函数取得最大值或最小值的点（称为最大值点或最小值点）既可能在D的内部，也可能在D的边界上。因此，求函数的最大值和最小

值时，可将函数$f(x, y)$在D内的所有极值及在D的边界上的最大值和最小值相比较，其中最大的就是最大值，最小的就是最小值。

但在通常遇到的实际问题中，如果根据问题的性质，知道函数$f(x, y)$在D内一定能取得最大值（最小值），而函数在D内只有一个驻点，则可以断定该驻点处的函数值就是$f(x, y)$在D上的最大值（最小值）。

例9 在xy平面上找出一点P，使它到三点$P_1(0,0)$、$P_2(1, 0)$，$P_3(0, 1)$距离平方之和为最小。

解 设$P(x, y)$为所求点，它与P_1、P_2、P_3三点距离平方之和为：

$$z=(x^2+y^2)+[(x-1)^2+y^2]+[x^2+(y-1)^2]$$
$$=3x^2+3y^2-2x-2y+2.$$

解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=6x-2=0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=6y-2=0. \end{cases}$$

得 $x=\dfrac{1}{3}$, $y=\dfrac{1}{3}$.

由问题的实际意义，到三点距离平方和最小的点应该存在，因此点$\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$就是所求的极小点$P$，也就是最小值点.

例10 某长方体木箱由面积为a^2的木板做成，求该长方体的长、宽和高各为多少时，可使长方体的体积为最大。

解 设长方体木箱的长、宽和高分别为x、y、z，故体积$V=xyz$，问题归结为求函数$V=xyz$，受下列条件：

$2(xy+yz+zx)=a^2$，$x>0$，$y>0$，$z>0$约束时的最大值。

由约束条件得

$$z=\frac{a^2-2xy}{2(x+y)},$$

代入$V=xyz$，得

$$V=\frac{xy(a^2-2xy)}{2(x+y)}.$$

对x、y求偏导数：

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{y^2(a^2-4xy-2x^2)}{2(x+y)^2},$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{x^2(a^2-4xy-2y^2)}{2(x+y)^2}.$$

令$\dfrac{\partial V}{\partial x}=0$，$\dfrac{\partial V}{\partial y}=0$，得方程组$\begin{cases}a^2-4xy-2x^2=0,\\a^2-4xy-2y^2=0,\end{cases}$

两式相减得$(x+y)(x-y)=0$，因为$x+y>0$，所以$x-y=0$，即$x=y$，

于是$a^2-6x^2=0$，即$x=\dfrac{\sqrt{6}}{6}a$（负值舍去），

所以
$$z=\frac{a^2-2\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{6}a\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{6}a}{2\left(\dfrac{\sqrt{6}}{6}a+\dfrac{\sqrt{6}}{6}a\right)}=\frac{\sqrt{6}}{6}a.$$

再由问题的实际意义可知，在表面积为a^2的长方体中，以边长为$\dfrac{\sqrt{6}}{6}a$的立方体的体积为最大。

习 题 8—5（2）

1．求下列函数的极值点.

（1）$z=xy(x^2+y^2-1)$；

（2）$z=x^2+\sin y$.

2．求下列函数 $z=z(x,y)$ 的极值.

（1）$z=x^4+y^4-4a^2xy+8a^4$；

（2）$x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$.

3．要造一个容积等于定数 k 的长方体无盖水池，应如何选择水池的尺寸，方可使它的表面积最小？

4．有一宽为24厘米的长方形铁板，把它两边折起来做成一断面为等腰梯形的水槽，问怎样折法才能使断面的面积最大？

5．设生产某种产品的数量与所用的两种原料 A、B 的数量 x、y 间有关系式

$$f(x,y)=0.005x^2y,$$

欲用150元购买原料，而 A、B 原料的单价分别为1元与2元，问购进这两种原料各多少，可使生产的产品的数量最多？

6．内接于椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的长方体（各侧面平行于坐标面），问当长、宽、高各等于多少时体积为最大？

复 习 题 八

1．一区域是由下列曲线围成：$y=0$，$y=2$，$y=\frac{1}{2}x$，$y=\frac{x}{2}-1$（边界除外），试将该区域用不等式表示出来.

2．一区域由二抛物线围成：$y=x^2$和$y^2=x$(边界包括在内)，试将该区域用不等式表示出来.

3．求下列函数的定义域：

（1）$z=\arcsin\frac{y}{x}$；（2）$z=\sqrt{\frac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$；

（3）$z=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$.

4．设$z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)$，若当$y=1$时，$z=x$，求函数$f(t)$及z.

5．求下列函数的一阶偏导数：

（1）$z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$；（2）$z=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{y}$；

（3）$u=(xy)^z$；（4）$u=z^{xy}$.

6．证明：$y=e^{-kn^2t}\sin nx$，满足方程

$$\frac{\partial y}{\partial t}=k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

7．证明：

$$z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+\psi\left(\frac{y}{x}\right)\text{满足方程}$$

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

其中φ与ψ是任意的二阶可微函数.

8．已知：$z=u^2\ln v$，$u=\frac{x}{y}$，$v=3x-2y$，

求：$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

9．已知：$w=\ln(x^2+y^2+2z)$，$x=r+s$，$y=r-s$，$z=2rs$．求：$\frac{\partial w}{\partial r}$，$\frac{\partial w}{\partial s}$.

10．已知：$u=\frac{e^{ax}(y-z)}{a^2-1}$，$y=a\sin x$，$z=a\cos x$

求：$\frac{du}{dx}$.

11. 设$u=f(x, y, z)$，而$x=t$，$y=\ln t$，$z=\mathrm{tg}\, t$，求$\dfrac{du}{dt}$.

12. 设$z=\sin\dfrac{x}{y}$，（1）求dz；（2）又若，$x=\ln t$，$y=2t$，求$\dfrac{dz}{dt}$.

13. 若$\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{x}=f\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}\right)$，求证：

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2.$$

14. 已知：$z^x=y^z$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

15. 试证 $u=\varphi(x+at)+\psi(x-at)$，满足波动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

其中φ，ψ有二阶连续偏导数。

16. 证明：由方程$\varphi(cx-az, cy-bz)=0$所定义的函数$z=z(x, y)$，满足$a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=c$，这里$\varphi$为任意可微函数.

17. 求$z=2\mathrm{arcctg}\dfrac{y}{x}$在点$(a, b)$处的切平面与法线方程.

18. 曲面$z=\dfrac{1}{2}x^2-4xy+9y^2+3x-14y+\dfrac{1}{2}$在何处有最高点或最低点？

19. 求由方程$z^2+xyz-x^2-xy^2=9$所确定的函数$z=f(x, y)$的极值.

20. (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3)是平面直角坐标系中坐标平面xoy上的三点，求点(x, y)使它至此三点的距离平方和为最小.

21. 证明对任意常数r、φ，球面$x^2+y^2+z^2=r^2$与锥面x^2+y^2

$=z^2\mathrm{tg}^2\varphi$是正交的（若二曲面在交点(x_0, y_0, z_0)处的法向量相互垂直，则称二曲面在此点正交）.

22. 已知矩形周长为$2p$，将它绕其一边旋转而构成一圆柱体，求所得圆柱体体积为最大的矩形.

第九章　重　积　分

和定积分类似，重积分也是某种和式的极限，只是把被积函数由一元函数推广到多元函数，积分范围由数轴上的一个区间推广到平面上或空间里的一个区域。

本章主要研究重积分的概念及计算方法。

第一节　二重积分的概念及其性质

一、　两　个　实　例

1.曲顶柱体的体积

设有一柱体，它的底是 xy 面上的区域 D*，它的侧面是以 D 的边界曲线为准线而母线平行于 z 轴的柱面，它的顶是曲面 $z=f(x,y)$，这里 $f(x,y)\geqslant 0$ 且在 D 上连续（图 9－1），这种柱体叫做**曲顶柱体**。现在来计算这个曲顶柱体的体积 V。

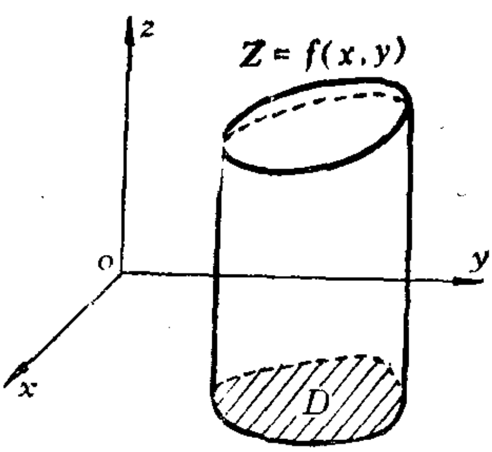


图　9－1

* 为方便起见，本章以后除特别声明外，都假定区域是有界闭区域，而且平面区域有有限面积，空间区域有有限体积。

我们知道，平顶柱体的高是不变的，可用体积公式

$$体积=高\times底面积$$

来计算．对于曲顶柱体，当点(x, y)在区域D上变动时，对应的高度$f(x, y)$是个变量，因此，它的体积不能直接用上式来计算．对于这个问题，我们可以仿照求曲边梯形面积的方法来解决．

把区域D任意分成n个小区域：$\Delta\sigma_1$，$\Delta\sigma_2$，…，$\Delta\sigma_n$，且这些小区域的面积也记作$\Delta\sigma_i$（$i=1, 2, \cdots, n$），以各小区域的边界曲线为准线作母线平行于z轴的柱面，这样，原来的曲顶柱体就被这些柱面分成n个小曲顶柱体，对于每一个小曲顶柱体来说，当它们对应的小区域$\Delta\sigma_i$的直径d_i*（$i=1, 2, \cdots, n$）很小时，各小曲顶柱体的高度变化很小，可视为平顶柱体，于是，在$\Delta\sigma_i$上任取一点(ξ_i, η_i)，则以$f(\xi_i, \eta_i)$为高，$\Delta\sigma_i$为底的平顶柱体的体积

$$f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

即为对应的小曲顶柱体体积的近似值（图9—2）。于是，这n个小平顶柱体体积之和，即为原曲顶柱体体积的近似值：

$$V\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

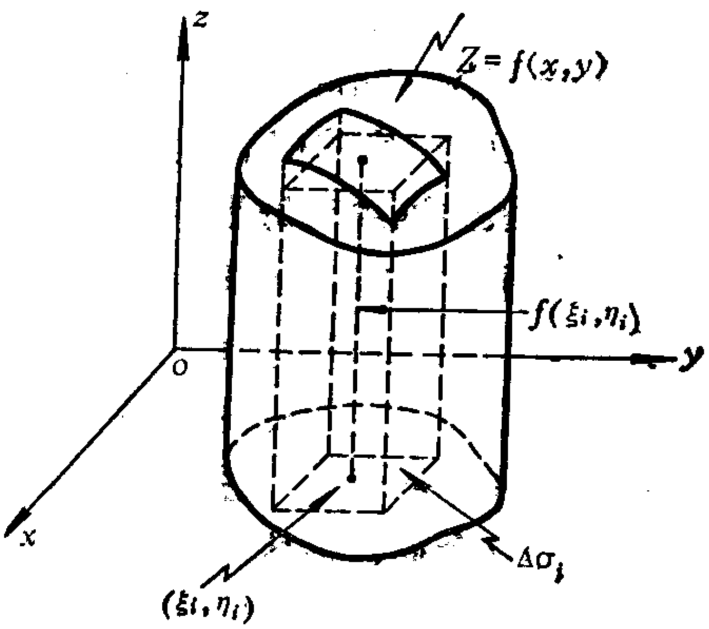


图 9—2

---

* 一个闭区域的直径是指区域上任意两点间的距离的最大者．

为了得到V的精确值，令n个直径d_i中的最大值λ（即$\lambda=\max\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$）趋于零，那末，和式$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$的极限值即为所求的曲顶柱体的体积

$$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

2. 平面薄片的质量

设有一平面薄片占有xy面上的区域D，在点(x, y)处的面密度是$\mu=\mu(x, y)$，这里$\mu(x, y)>0$，且在D上连续．求这块薄片的质量m（图9—3）．

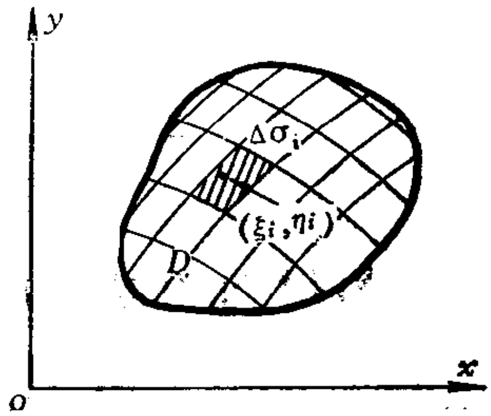


图 9—3

对于质量均匀分布的薄片，其面密度μ是个常数，薄片的质量可由公式

质量＝面密度×面积

求得．对于非均匀分布的薄片来说，其面密度$\mu(x, y)$是个变量，因此，薄片的质量就不能直接用上面的公式求得，但可仿照求曲顶柱体体积的方法来解决．

把薄片（即区域）D任意分成n个小块$\Delta\sigma_i$（$i=1, 2, \cdots, n$），各小块的面积也用$\Delta\sigma_i$表示，只要各小块$\Delta\sigma_i$的直径很小，各小块的质量可近似地看成是均匀分布的，$\mu(x, y)$在$\Delta\sigma_i$上可看成是个常量，在$\Delta\sigma_i$上任取一点(ξ_i, η_i)，从而$\mu(\xi_i, \eta_i)\cdot\Delta\sigma_i$（$i=1, 2, \cdots, n$）即为小块薄片$\Delta\sigma_i$质量的近似值（图9—3），于是和式

$$\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

即为薄片质量的近似值，记$\lambda=\max\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$，则当$\lambda\to 0$时，和式的极限值即为所求薄片的质量

$$m=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

二、二重积分的定义

上述两个问题的具体意义虽然不同，但它们的解决方法和最后得到的数学式子却是一样的，也就是它们都属于求二元函数在平面闭区域上的和式的极限问题。在物理、力学、几何和工程技术中，有许多物理量或几何量都归结为求这种和式的极限，抽去它们的几何、物理意义就得到二重积分的定义。

定义 设二元函数$f(x, y)$在有界闭区域D上连续。将区域D任意分成n个小区域$\Delta\sigma_i$（$i=1, 2, \cdots, n$），这些小区域的面积也用$\Delta\sigma_i$表示，在小区域$\Delta\sigma_i$上任取一点(ξ_i,η_i)，作乘积$f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$（$i=1,2,\cdots, n$），并作和式$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$，如果当各小区域的直径中的最大值$\lambda$趋于零时，这个和式的极限存在，则称此极限值为函数$f(x, y)$在区域$D$上的**二重积分**，记作$\iint\limits_D f(x, y)d\sigma$，即

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i,$$

其中 $f(x, y)$ 叫做**被积函数**，$d\sigma$叫做**面积元素**，D叫做**积分区域**，$f(x, y)d\sigma$叫做**被积表达式**，x、y叫做**积分变量**，$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$叫做**积分和式**。

应当指出，如果 $f(x, y)$在闭区域D上连续，那么，无论D如何分法，点(ξ_i, η_i)如何取法，积分和式的极限必存在，**即闭区域上的连续函数一定可积**。

由于$\Delta\sigma_i$是由D进行任意分割而得到的，在直角坐标系中也可以用平行于坐标轴的直线来划分区域D，这样得到的小区域$\Delta\sigma_i$绝大部分是矩形区域，设$\Delta\sigma_i$的边长是Δx_i、Δy_i，则有$\Delta\sigma_i = \Delta x_i \Delta y_i$，因此，在直角坐标系中，面积元素为$d\sigma = dxdy$，从而二重积分也可写成$\iint_D f(x, y)dxdy$，即

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = \iint_D f(x, y)dxdy,$$

其中$dxdy$叫做**直角坐标系中的面积元素**.

由二重积分的定义可知，曲顶柱体的体积是曲顶上点的竖标 $f(x, y)$在底D上的二重积分：

$$V = \iint_D f(x, y)d\sigma.$$

平面薄片的质量是它的面密度$\mu(x, y)$在薄片所占区域D上的二重积分：

$$m = \iint_D \mu(x, y)d\sigma.$$

二重积分的几何意义 在闭区域D上，如果$f(x, y)\geqslant 0$，由于我们总可把被积函数$f(x, y)$解释为曲顶柱体的顶在点(x, y)的竖标，所以，二重积分$\iint\limits_D f(x, y)d\sigma$等于一个以$D$为底，曲面$z=f(x, y)$为顶的柱体体积；如果$f(x, y)\leqslant 0$，则二重积分$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$的绝对值仍等于柱体的体积$V$，这时柱体在$xy$面的下方，故有$\iint\limits_D f(x, y)d\sigma=-V$；如果$f(x, y)$在$D$的部分区域上是正的，而在其它的部分区域上是负的，那么，二重积分$\iint\limits_D f(x, y)d\sigma$就等于$xy$面上方柱体的体积减去$xy$面下方柱体的体积。

三、二重积分的性质

比较定积分与二重积分的定义可知，二重积分与定积分有类似的性质，现叙述于下：

性质1° 被积函数的常数因子可提到积分号外面来，即

$$\iint\limits_D kf(x, y)d\sigma=k\iint\limits_D f(x, y)d\sigma$$（其中k为常数）。

性质2° 函数代数和的二重积分等于各个函数的二重积分

的代数和，即

$$\iint_D [f(x,y)\pm g(x,y)]d\sigma$$

$$=\iint_D f(x,y)d\sigma \pm \iint_D g(x,y)d\sigma.$$

性质3° 如果闭区域D由有限条曲线分为有限个部分闭区域，则在D上的二重积分等于在各部分闭区域上的二重积分的和。

例如，D被分成两个闭区域D_1、D_2，即$D=D_1+D_2$，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma$$

$$+\iint_{D_2} f(x,y)d\sigma.$$

这个性质表示二重积分对于积分区域具有**可加性**。

性质4° 如果在D上，$f(x,y)=1$，σ是D的面积，则

$$\sigma=\iint_D d\sigma.$$

此式在几何上表示高为1的平顶柱体体积其数值等于柱体的底面积。

性质5° 在闭区域D上，如果$f(x,y)\geqslant\psi(x,y)$，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma\geqslant\iint_D \psi(x,y)d\sigma.$$

性质6° 设$f(x,y)$在闭区域D上的最大值和最小值分别为M和m，D的面积是σ，则

$$m\sigma\leqslant\iint_D f(x,y)d\sigma\leqslant M\sigma.$$

证 因为在D上，恒有$m\leqslant f(x, y)\leqslant M$，所以，由性质5°得

$$\iint_D m d\sigma\leqslant\iint_D f(x, y)d\sigma\leqslant\iint_D M d\sigma.$$

再由性质1°和4°得

$$m\sigma\leqslant\iint_D f(x, y)d\sigma\leqslant M\sigma.$$

性质7° （中值定理） 设函数$f(x, y)$在闭区域D上连续，σ是D的面积，则在D上至少存在一点(ξ, η)，使得

$$\iint_D f(x, y)d\sigma=f(\xi, \eta)\cdot\sigma$$

成立。

证 由性质6°

$$m\sigma\leqslant\iint_D f(x, y)d\sigma\leqslant M\sigma,$$

得

$$m\leqslant\frac{1}{\sigma}\iint_D f(x, y)d\sigma\leqslant M,$$

这就是说，$\frac{1}{\sigma}\iint_D f(x, y)d\sigma$是介于函数$f(x, y)$在$D$上的最小值$m$与最大值$M$之间的一个数。根据在闭区域上连续函数的介值定理，可知在D上至少存在一点(ξ, η)，使得函数在该点的值$f(\xi, \eta)$与这个确定的数值相等，即

$$\frac{1}{\sigma}\iint_D f(x, y)d\sigma=f(\xi, \eta),$$

也即 $$\iint\limits_D f(x, y)\,d\sigma = f(\xi, \eta)\cdot\sigma.$$

如果把二重积分看作是柱体的体积，那么中值定理是说：以D为底，曲面$z=f(x, y)$为顶的曲顶柱体的体积等于同底而高为$f(\xi, \eta)$的平顶柱体的体积，数$\dfrac{1}{\sigma}\iint\limits_D f(x, y)\,d\sigma$叫做函数$f(x, y)$在$D$上的**中值或平均值**。

习 题 9—1

1．设有一平面薄板（不计其厚度），占有xy面上的区域D，薄板上分布有密度为$\mu(x, y)$的电荷，且$\mu(x, y)$在D上连续，试用二重积分表达该板上的全部电荷Q.

2．设$I_1=\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)\,d\sigma$，其中$D_1$是矩形区域：$-1\leqslant x\leqslant 1$，$-2\leqslant y\leqslant 2$；又$I_2=\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2)\,d\sigma$，其中$D_2$是矩形区域：$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 2$. 试利用二重积分的几何意义说明$I_1$与$I_2$之间的数量关系.

第二节 二重积分的计算法

计算二重积分，关键是要把二重积分化为二次积分，讨论如下：

一、在直角坐标系中的计算法

直角坐标系中的二重积分是$\iint\limits_D f(x, y)dxdy$，我们从几何的角度来讨论它的计算问题。

我们假定在积分区域D上$f(x, y)\geqslant 0$，且D由$\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$表示（图9—4），其中$\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$在区间$[a, b]$上连续。

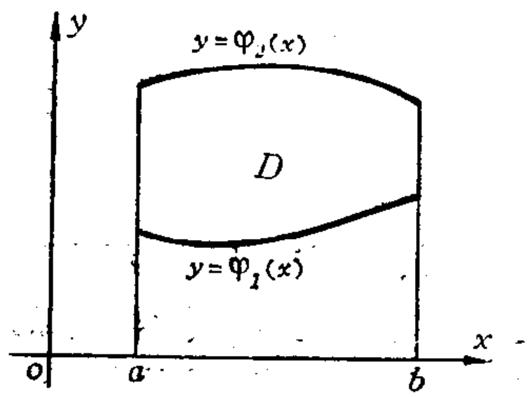
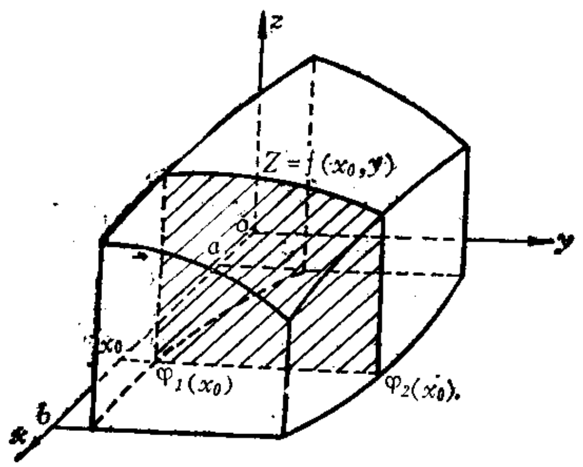


图 9—4

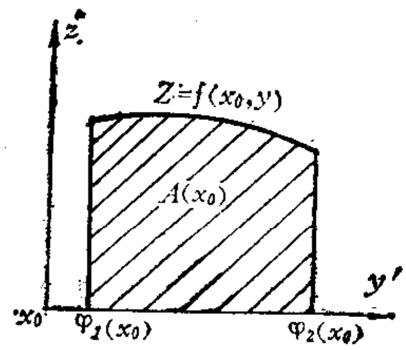
根据二重积分的几何意义，当$f(x, y)\geqslant 0$时，二重积分$\iint\limits_D f(x, y)dxdy$的值就等于以$D$为底，以曲面$z = f(x, y)$为顶的曲顶柱体体积。我们知道，平行截面面积为已知的立体体积是可以用定积分求得的，现在利用这个方法来求曲顶柱体的体积，先求出平行截面的面积。

在区间$[a, b]$上任取一点x_0，作平行于yz面的平面$x = x_0$，这平面截曲顶柱体所得的截面是一个以区间$[\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0)]$为底，曲线$z = f(x_0, y)$为曲边的曲边梯形（图9—5（$a$）中的阴影部分，（$b$）中的平面$y'x_0z'$即（$a$）中的平面$x = x_0$），所以，这截面的面积就是定积分

$$A(x_0)=\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0,\ y)\,dy.$$



(a)



(b)

图 9—5

一般地，过区间[a, b]上任一点x且平行于yz面的平面截曲顶柱体所得截面的面积为

$$A(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy.$$

这里由于平行截面的面积$A(x)$为已知，于是由定积分可得曲顶柱体的体积为

$$V=\int_a^b A(x)dx=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx,$$

这个体积V正是所求的二重积分的值，即

$$\iint_D f(x,\ y)dxdy=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)dy\right]dx.$$

此式右端是一个先对y、后对x的**二次积分**，先对y积分，就是把被积函数$f(x,\ y)$中的x视为常数，在区间[$\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$]上对y作第一次积分。这样，积分后得到的是一个关于x的函数，然后将这函数在区间[a, b]上对

x 作第二次积分，所得的结果即为所求的二重积分的值。

先对 y、后对 x 的二次积分常记作

$$\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy.$$

因此，我们就得到

$$\iint_D f(x, y)dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy. \quad (1)$$

(1)式是二重积分化为先对 y 后对 x 的二次积分的公式。

在上述讨论中，我们曾假定 $f(x, y)\geqslant 0$，其实公式(1)的成立并不受此条件限制。

类似地，如果积分区域 D 由 $\psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y)$，$c\leqslant y\leqslant d$ 表示(图9—6)，其中 $\psi_1(y)$、$\psi_2(y)$ 在区间 $[c, d]$ 上连续，则有

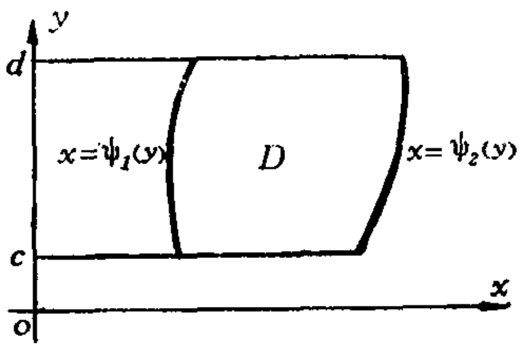


图 9—6

$$\iint_D f(x, y)dxdy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx. \quad (2)$$

(2)式是把二重积分化为先对 x、后对 y 的二次积分的公式。

如果 $\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$ 与 $\psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y)$，$c\leqslant y\leqslant d$ 表示的是同一个积分区域 D，则等式

$$\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx$$

成立，因为它们都等于同一个二重积分 $\iint_D f(x, y)dxdy$。

由此可知，把一个二重积分化为二次积分，一般说来都有

先对x、后对y或先对y、后对x两种积分次序。积分次序选择得是否恰当，对二重积分的计算往往是有较大影响的.另外，在选择积分次序的同时要确定相应的对y、对x的积分上下限，这是跟积分区域有关的。

积分区域D规定了积分变量的变化范围，一般都用不等式表示.为便于分析，我们总是先画出D的图形.例如，若积分区域D由曲线$y=\varphi_1(x)$，$y=\varphi_2(x)$和直线$x=a$，$x=b$围成，画出其图形，如图9—7所示，我们从图可以看出，应该选择公式(1)的积分次序(先对y后对x)。这是因为，当我们在区间$[a, b]$上任意取定一个x值时，区域D上与它对应的点在平行于y轴的线段AB上，这线段上的点的纵坐标y由$\varphi_1(x)$变到$\varphi_2(x)$(即点由A沿线段AB变到B)，所以，y的变化范围是$\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)$，这就是公式(1)中对$y$积分的积分区间。相应的$x$的变化范围是从$a$到$b$，即$a\leqslant x\leqslant b$，

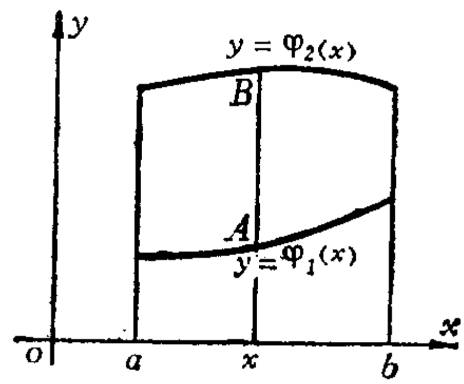


图9—7

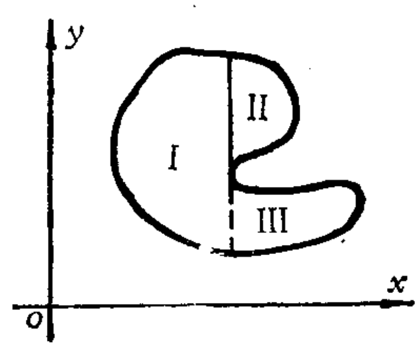


图9—8

这是对x积分的积分区间，这样，用不等式

$$\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x),\qquad a\leqslant x\leqslant b$$

表示D，也就确定了先对y、后对x的二次积分的积分次序和积分上下限，从而立即得到

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy,$$

这里应该指出，在应用公式(1)(或(2))时，积分区域D必须满足这样的条件：穿过闭区域D内部且平行y轴（或x轴）的直线与D的边界曲线相交不多于两点，如果区域D如图9—8那样，穿过D内部且平行于y轴（或x轴）的直线与D的边界曲线相交多于两点，则可照图9—8那样将D分成三个部分区域，各个部分区域上的二重积分，都可用公式(1)解决，于是由性质3°，区域D上的二重积分就等于各部分区域上的二重积分的和。

例1 将二重积分

$$I=\iint_D f(x,y)dxdy$$

化为二次积分（两种次序）。其中D是由$y=x$，$y=0$，$x^2+y^2=1$围成的第一象限内的区域.

解 画出D的图形（图9—9）。

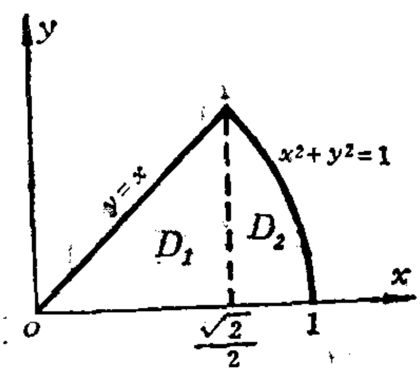


图 9—9

(1)先对y、后对x积分：

对于积分区域D，公式(1)中的$\varphi_1(x)$是$y=0$（$0\leqslant x\leqslant 1$），$\varphi_2(x)$是$y=x$（$0\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$）和$y=\sqrt{1-x^2}$（$\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant x\leqslant 1$）两条曲线组成的，也即当$x$在$[0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$上

任取一值时，对应的 y 从 $y=0$ 变到 $y=x$；x 在$[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$上任取一值时，对应的 y 从 $y=0$ 变到 $y=\sqrt{1-x^2}$。因此，对于这种区域，我们需用直线 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 将 D 分成 D_1、D_2 两部分，使 $D=D_1+D_2$，其中 D_1 是 $0\leqslant y\leqslant x$，$0\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，$D_2$ 是 $0\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant x\leqslant 1$，这样，二重积分可在 D_1、D_2 上分别化为二次积分，使得

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_1} f(x, y)dxdy+\iint\limits_{D_2} f(x, y)dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx\int_0^x f(x, y)dy+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)dy.$$

(2)先对 x、后对 y 积分：

对于 D，公式(2)中的 $\psi_1(y)=y$, $\psi_2(y)=\sqrt{1-y^2}$，$c=0$，$d=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以，区域 D 可用不等式

$$y\leqslant x\leqslant\sqrt{1-y^2},\qquad 0\leqslant y\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

表示，于是有

$$\iint_D f(x, y)dxdy=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x, y)dx.$$

从形式上看，用公式(2)要比用公式(1)简单得多，因此，在二重积分的计算中要注意积分次序的选择。

例 2 计算$\iint_D(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4})dxdy$，其中$D$是矩形域：

$$-2\leqslant y\leqslant 2, \qquad -1\leqslant x\leqslant 1.$$

解 画出矩形域D（图 9—10）。

先对 y、后对x 积分，用公式(1)。

$$\iint_D(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4})dxdy$$

$$=\int_{-1}^1 dx\int_{-2}^2(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4})dy$$

$$=\int_{-1}^1[(1-\frac{x}{3})y-\frac{1}{8}y^2]_{-2}^2 dx$$

$$=4\int_{-1}^1(1-\frac{x}{3})dx=8.$$

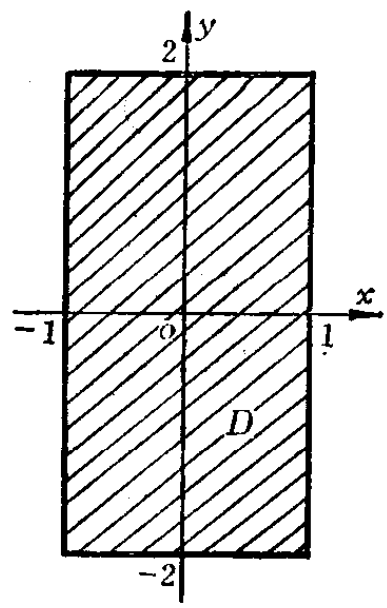


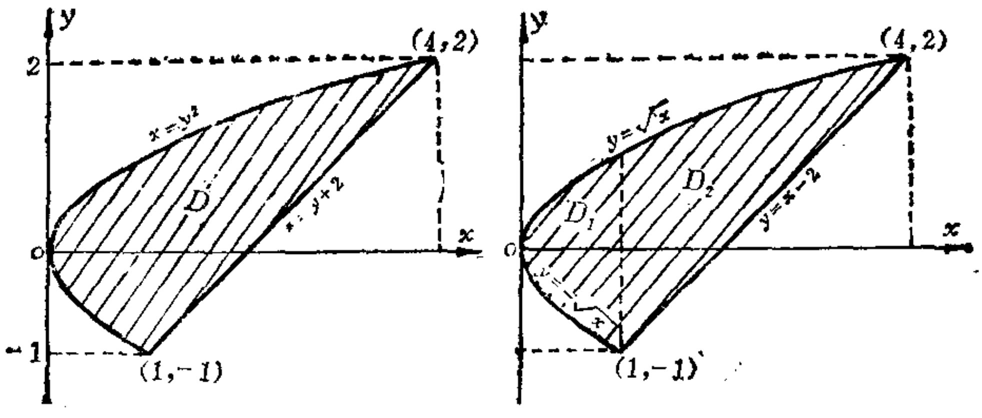
图 9—10

例 3 计算$\iint_D xydxdy$，其中D是由抛物线$y^2=x$ 及直线 $y=x-2$ 所围成的区域。

解 画出D的图形（图 9—11(a)）。

由方程组

$$\begin{cases} y=x-2, \\ y^2=x \end{cases}$$



(a)　　　(b)

图　9—11

解得两曲线交点为(1 ,－ 1)和(4 ,2)。若先对x 积分，用公式(2)，此时D可用不等式$y^2\leqslant x\leqslant y+2$，$-1\leqslant y\leqslant 2$表示，所以

$$\iint\limits_D xy\,dx\,dy=\int_{-1}^{2}y\,dy\int_{y^2}^{y+2}x\,dx=\int_{-1}^{2}y\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{y^2}^{y+2}dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}[y(y+2)^2-y^5]dy$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{y^4}{4}+\frac{4}{3}y^3+2y^2-\frac{y^6}{6}\right]_{-1}^{2}$$

$$=5\frac{5}{8}.$$

本题如先对y积分，就要用直线$x=1$将D分成两个部分区域D_1、D_2，使$D=D_1+D_2$[图 9—11(b)]，其中

$$D_1:\ -\sqrt{x}\leqslant y\leqslant\sqrt{x},\quad 0\leqslant x\leqslant 1;$$

$$D_2:\ x-2\leqslant y\leqslant\sqrt{x},\quad 1\leqslant x\leqslant 4.$$

于是

$$\iint\limits_D xy\,dx\,dy=\iint\limits_{D_1}xy\,dx\,dy+\iint\limits_{D_2}xy\,dx\,dy$$

$$=\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy\,dy+\int_1^4 dx\int_{x-2}^{\sqrt{x}} xy\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x[y^2]_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}dx+\frac{1}{2}\int_1^4 x[y^2]_{x-2}^{\sqrt{x}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^4 x(-x^2+5x-4)dx=5\frac{5}{8}.$$

显然，本题先对x积分比先对y积分计算要简捷得多，可见计算二重积分时，要根据积分区域的特点灵活选择积分次序。

例 4 计算$\iint\limits_D\frac{\sin y}{y}dxdy$，其中$D$是由直线 $y=x$ 及抛物线 $x=y^2$所围成的区域（图 9—12）。

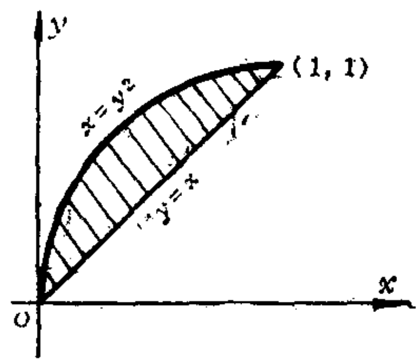


图 9—12

解 先对x、后对y积分．积分区域D为

$$y^2\leqslant x\leqslant y,\ 0\leqslant y\leqslant 1.$$

所以$\iint\limits_D\frac{\sin y}{y}dxdy=\int_0^1 dy\int_{y^2}^{y}\frac{\sin y}{y}dx$

$$=\int_0^1\frac{\sin y}{y}[x]_{y^2}^{y}dy=\int_0^1\frac{\sin y}{y}(y-y^2)dy$$

$$=\int_0^1(\sin y-y\sin y)dy=[-\cos y-(-y\cos y+\sin y)]_0^1$$

$$=1-\sin 1\doteq 0.1585.$$

本题若先对 y、后对x 积分，则

$$\text{原式}=\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\sin y}{y}dy,$$

由于$\frac{\sin y}{y}$的原函数不能用初等函数表示，所以本题不能按此次序积分。

由此可看出，为了能简便地计算二重积分，除了要注意积分区域D的特点（如例3）外，还应注意被积函数的特点，灵活选择积分次序。

二、在极坐标系中的计算法

和定积分类似，有些二重积分利用极坐标计算比利用直角坐标计算要简单得多，这是因为，一方面，有些积分区域D的边界曲线用极坐标方程表示比较简单，例如圆的方程用$r=a$要比用$x^2+y^2=a^2$表示简单。另一方面，有些被积函数$f(x,y)$用极坐标r、θ表示也比较简单，因此，我们有必要讨论用极坐标来计算二重积分的问题。

先讨论二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$的极坐标形式。

已知直角坐标系与极坐标系的变量关系式是$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$。用它们来替换$f(x,y)$中的x、y，便得到被积函数的极坐标形式

$$f(x,y)=f(r\cos\theta,r\sin\theta).$$

另外，我们假定从极点O出发且穿过区域D内部的射线与D的边界曲线相交不多于两点，用以极点O为中心的一族同心圆：$r=$常数，以及从极点O出发的一族射线：$\theta=$常数，把区域D分成n个小区域$\Delta\sigma_i$，把$\Delta\sigma_i$近似地看作一边长为

Δr_i，另一边长为 $r_i\Delta\theta_i$（这里 r_i 是圆弧的半径，$\Delta\theta_i$ 是圆弧所对的中心角）的矩形，因此 $\Delta\sigma_i \approx r_i\Delta r_i\Delta\theta_i$（图9—13），于是得面积元素

$$d\sigma = r dr d\theta,$$

这就是**极坐标系中的面积元素**。

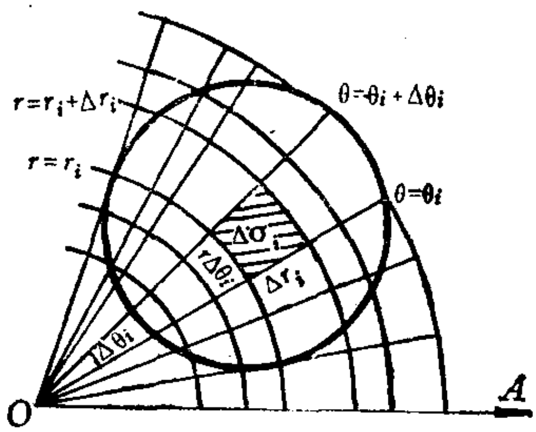


图 9—13

这样就得到极坐标形式的二重积分

$$\iint\limits_D f(x, y)d\sigma = \iint\limits_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)r dr d\theta \qquad (3)$$

或

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx dy = \iint\limits_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)r dr d\theta. \qquad (4)$$

(4)式就是直角坐标的二重积分变换为极坐标的二重积分的公式。

由公式(3)、(4)，把直角坐标的二重积分 $\iint\limits_D f(x, y)\, dx dy$ 转换为极坐标的二重积分，只需要作变换 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ 和 $d\sigma = dx dy = r dr d\theta$，即可得到(3)式或(4)式。

关于极坐标的二重积分的计算，同样是采用化为二次积分的方法，下面我们分两种情况予以介绍：

1.极点O在区域D的外部（图9—14）或边界上。

设曲线BEC和BFC的方程分别为 $r = r_1(\theta)$ 和 $r = r_2(\theta)$，射线OB和OC的方程分别为 $\theta = \alpha$ 和 $\theta = \beta$。所以，积分区域D所对应的θ的变化范围是 $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$

在区间[α，β]内任取一值θ，D上相应点的极径 r 由$r_1(\theta)$变到$r_2(\theta)$（即点由E沿线段EF变到F），也即$r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta)$，因此，$D$可用$r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta)$，$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$表示，于是极坐标的二重积分可化为二次积分

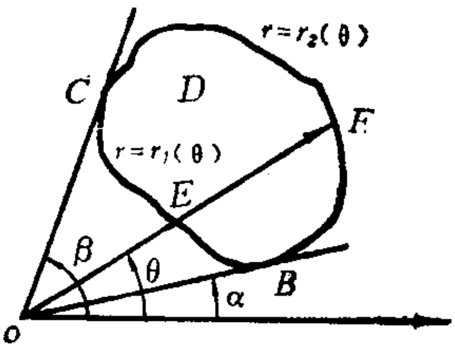


图 9—14

$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr. \tag{5}$$

(5)式就是化极坐标的二重积分为二次积分的公式。

2. 极点O在区域D的内部（图9—15）。

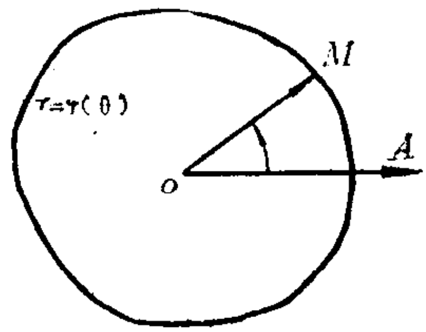


图 9—15

设D的边界曲线的方程为$r=r(\theta)$，其中θ由0变到2π，即$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，在[0，$2\pi$]内任取一值$\theta$，$D$上相应的点的极径由0变到$r(\theta)$（即点从极点$O$沿$OM$变到$M$），即有$0\leqslant r\leqslant r(\theta)$，因此，$D$可用

$$0\leqslant r\leqslant r(\theta),\qquad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

表示，于是极坐标的二重积分化为二次积分的另一个公式为

$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{r(\theta)}f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr. \tag{6}$$

例 5 计算$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy$，其中$D$是由中心在原点，半径为$a$的圆周所围成的区域。

解 在极坐标系中，区域D可表示为

$0\leqslant r\leqslant a$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$（图 9—16）。

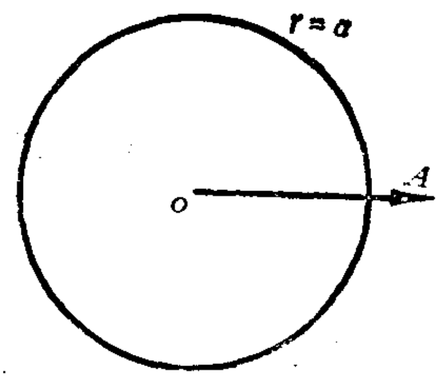


图 9—16

这是属于第 2 种情况，所以

$$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy$$

$$=\iint\limits_D e^{-r^2}rdrd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a re^{-r^2}dr$$

$$=[\theta]_0^{2\pi}\cdot\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^a=\pi(1-e^{-a^2}).$$

本题若用直角坐标计算，由于积分$\int e^{-x^2}dx$不能用初等函数表示，所以积分计算不出来。

例 6 利用极坐标计算$\iint\limits_D\frac{xdxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$，其中$D$是半圆环：

$1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$，$x\geqslant 0$（图 9—17）。

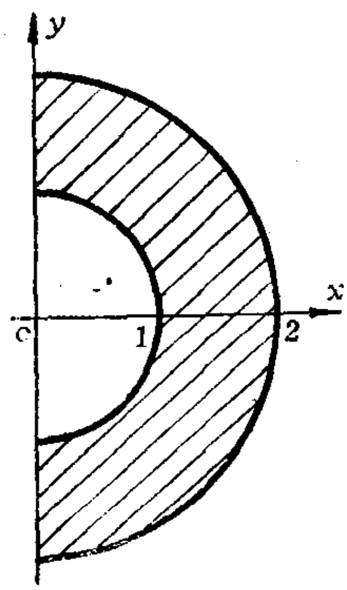


图 9—17

解 在极坐标系中（D是属于第 1 种情况），

$$1\leqslant r\leqslant 2,\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},$$

于是

$$\iint_D \frac{x\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \iint_D r\cos\theta\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta \int_1^2 r\,dr$$

$$= [\sin\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{1}{2}r^2\right]_1^2 = 3.$$

本题若用直角坐标计算，那是很麻烦的。

习　题　9—2

1．计算下列矩形域D上的二重积分：

（1）$\iint_D (x^2+y^2)\,d\sigma$，　　D：$|x|\leqslant 1$，$|y|\leqslant 2$；

（2）$\iint_D \frac{d\sigma}{(x-y)^2}$，　　D：$1\leqslant x\leqslant 2$，$3\leqslant y\leqslant 4$；

（3）$\iint_D \sin x\cos y\,d\sigma$，　　D：$0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$.

2．计算下列三角形域D上的二重积分：

（1）$\iint_D (3x+2y)\,d\sigma$，D由直线$x+y=2$及两坐标轴围成；

（2）$\iint_D (x+y)^2 d\sigma$，D的三个顶点分别为（1，0），（2，0），（0，2）.

3．把二重积分$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$化为二次积分（两种次序），其中$D$是：

（1）由直线$y=x$及抛物线$y^2=4x$围成；

（2）由x轴及半圆周$x^2+y^2=a^2$（$y\geqslant0$）围成；

（3）由直线$y=x$，$x=2$及双曲线$y=\dfrac{1}{x}$（$x>0$）围成.

4．画出积分区域D的图形，改换下列二次积分的积分次序：

（1）$\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx$；　　（2）$\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy$；

（3）$\int_0^1 dy\int_0^{2y} f(x,y)dx+\int_1^3 dy\int_0^{3-y} f(x,y)dx$.

5．计算在下列区域D上的二重积分：

（1）$\iint\limits_D x\sqrt{y}\,d\sigma$，$D$由两条抛物线$y=\sqrt{x}$，$y=x^2$围成；

（2）$\iint\limits_D xy^2d\sigma$，$D$由圆周$x^2+y^2=4$及$y$轴围成的右半区域；

（3）$\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}d\sigma$，$D$由直线$x=0$，$y=1$，$y=2$及抛物线$y^2=x$围成；

（4）$\iint\limits_D (x^2-y^2)d\sigma$，$D$：$0\leqslant y\leqslant\sin x$，$0\leqslant x\leqslant\pi$；

（5）$\iint\limits_D\sqrt{4x^2-y^2}\,d\sigma$，$D$由$y=x$，$x=1$，$y=0$围成。

6．画出下列各题的积分区域D，并把积分$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$表示为极坐标形式的二次积分，$D$是：

(1) $x^2+y^2\leqslant a^2\ (a>0)$；　　(2) $x^2+y^2\leqslant 2x$；

(3) $a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2\ (0<a<b)$.

7. 把下列二次积分转换为极坐标形式的二次积分：

(1) $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx+\int_1^2 dy\int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx$；

(2) $\int_0^2 dx\int_x^{\sqrt{3}x} f(x^2+y^2)\,dy$.

8. 利用极坐标计算下列各题：

(1) $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\,d\sigma$,　　D：$x^2+y^2\leqslant 4$；

(2) $\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\,d\sigma$,　D：$x^2+y^2\leqslant 1$，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$；

(3) $\iint\limits_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,d\sigma$,　　D：$1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$，$0\leqslant y\leqslant x$；

(4) $\iint\limits_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,d\sigma$,　　D：$1\leqslant x^2+y^2\leqslant e^2$.

9. 利用极坐标计算下列各题：

(1) $\int_0^{2a} dx\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2+y^2)\,dy\ (a>0)$；

(2) $\int_0^a dy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2)\,dx$.

10. 选用适当的坐标计算下列各题：

(1) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,d\sigma$，$D$由$x=2$，$y=x$，$xy=1$围成；

(2) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,d\sigma$，$D$：$x+y\geqslant 0$，$x-y\geqslant 0$，$x^2+y^2\leqslant a^2$

$(a>0)$；

(3) $\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$，$D$：$a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2$，$(0<a<b)$；

(4) $\iint\limits_{D}\sin\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$，$D$：$\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2$；

(5) $\iint\limits_{D}(x^2+y^2-xy)\,d\sigma$，$D$由$y=x$，$y=x+a$，$y=a$及$y=3a$ $(a>0)$围成

11. 计算下列极坐标系下的二重积分：

(1) $\iint\limits_{D} r\sin\theta\,dr\,d\theta$，$D$：$0\leqslant r\leqslant a\sin\theta$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$；

(2) $\iint\limits_{D} r^2\sin\theta\,dr\,d\theta$，$D$是由心形线$r=a(1+\cos\theta)$的上半部和$x$轴所围成的闭区域.

12. 利用二重积分计算下列曲线所围成的图形的面积：

(1) $xy=a^2$，$xy=2a^2$，$y=x$，$y=2x$；

(2) $(x^2+y^2)^2=8a^2xy$；　　(3) $r^2=2a^2\cos2\theta$.

第三节　二重积分的应用举例

在定积分的应用中，我们介绍了定积分的微元法，这种方法也可以推广到二重积分的应用中，就是如果所要计算的某个量Q对于区域D具有可加性，并且在区域D上任取一个直径很小的区域$d\sigma$及在$d\sigma$上任取一点(x, y)时，相应的部分量有$\Delta Q\approx dQ=f(x, y)d\sigma$（这里当$d\sigma$的直径趋于零时，$dQ$与$\Delta Q$相差一个比$d\sigma$较高阶的无穷小），$dQ$叫做所求量$Q$

的**微元**。以它为被积表达式，在D上积分即得所求量Q，即

$$Q=\iint_D f(x,y)\,d\sigma.$$

例如，用微元法处理本章第一节中求平面薄片的质量，那就是：在区域D上任取一个直径很小的小区域$d\sigma$（小区域的面积也记为$d\sigma$）及在$d\sigma$上任取一点(x,y)，作乘积$\mu(x,y)d\sigma$，即得**质量微元**（图9—18）：

$$dm=\mu(x,y)\,d\sigma;$$

把它在D上积分即得薄片的质量

$$m=\iint_D \mu(x,y)\,d\sigma.$$

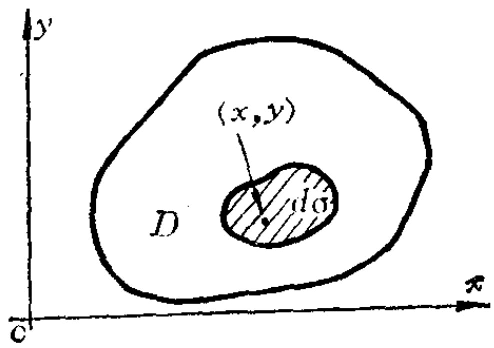


图 9—18

一、几何应用举例

1. 立体体积

根据二重积分的几何意义，当$f(x,y)\geqslant 0$时，二重积分$\iint_D f(x,y)\,d\sigma$等于以D为底，曲面$z=f(x,y)$为顶的曲顶柱体的体积V，即

$$V=\iint_D f(x,y)\,d\sigma.$$

例1 求由平面$z=0$，$y=0$，$3x+y=6$及$x+y+z=6$，所围成的立体的体积V。

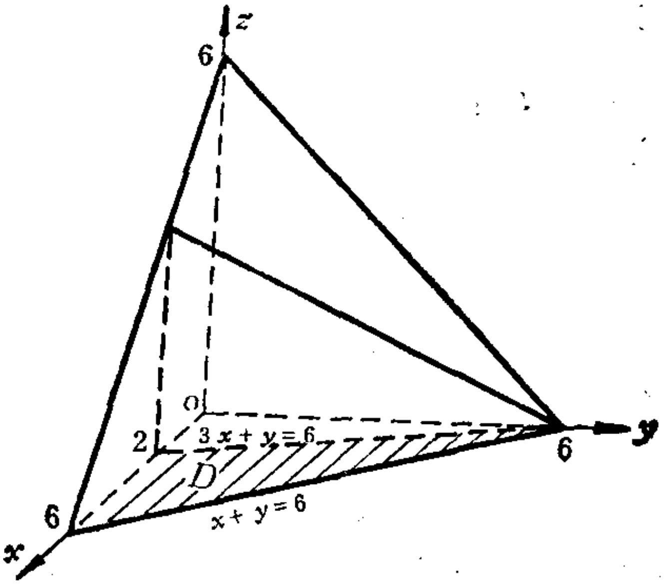


图　9—19

解　立体如图 9 —19所示，立体的底是由直线 $y=0$，$x+y=6$，$3x+y=6$所围成的区域D，顶是平面 $z=6-x-y$，于是

$$V=\iint_D (6-x-y)\,dx\,dy.$$

因D是：$\frac{1}{3}(6-y)\leqslant x\leqslant 6-y$，$0\leqslant y\leqslant 6$。

于是得

$$V=\int_0^6 dy\int_{\frac{1}{8}(6-y)}^{6-y}(6-x-y)\,dx$$

$$=\int_0^6\left[(6-y)x-\frac{1}{2}x^2\right]_{\frac{1}{8}(6-y)}^{6-y}dy$$

$$=\frac{2}{9}\int_0^6(6-y)^2\,dy=16.$$

例 2　求椭圆抛物面$z=9x^2+y^2$与平面$z=1$所围成的立体体积V（图 9 —20）。

解 立体在xy面上的投影区域D是椭圆$9x^2+y^2\leqslant 1$，由于它具有对称性，故只需先计算第一卦限的体积V_1，而$V=4V_1$，对应的积分区域是D_1：

$$0\leqslant y\leqslant\sqrt{1-9x^2},0\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}$$

（图9—20中的阴影部分），因此，体积V_1就是以D_1为底，

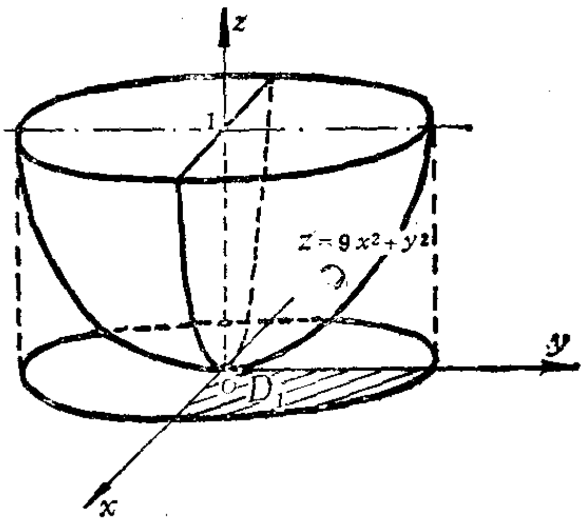


图 9—20

以$z=1$为顶的平顶柱体体积与以$z=9x^2+y^2$为顶的曲顶柱体体积之差，所以

$$V_1=\iint\limits_{D_1}[1-(9x^2+y^2)]dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{1}{3}}dx\int_0^{\sqrt{1-9x^2}}[1-(9x^2+y^2)]dy$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{3}}\left(1-9x^2\right)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{\pi}{24}.$$

于是 $$V=4V_1=\frac{\pi}{6}.$$

2.曲面的面积

设曲面S的方程为

$$z=f(x,y),$$

D是曲面S在xy面上的投影区域（图9—21），函数$f(x,y)$

在D上具有连续偏导数 $f_x(x, y)$和 $f_y(x, y)$，求曲面S的面积A。

在D内任取一小区域$d\sigma$（同时小区域的面积也记为$d\sigma$）及在$d\sigma$内任取一点$P(x,y)$，曲面S上对应地有一点$M(x, y, f(x,y))$，点P即为点M在xy面上的投影。在点M处作曲面S的切平面T。以小区域$d\sigma$的边界曲线为准线作母线平行于z轴的柱面，这柱面同时截下曲面S的一

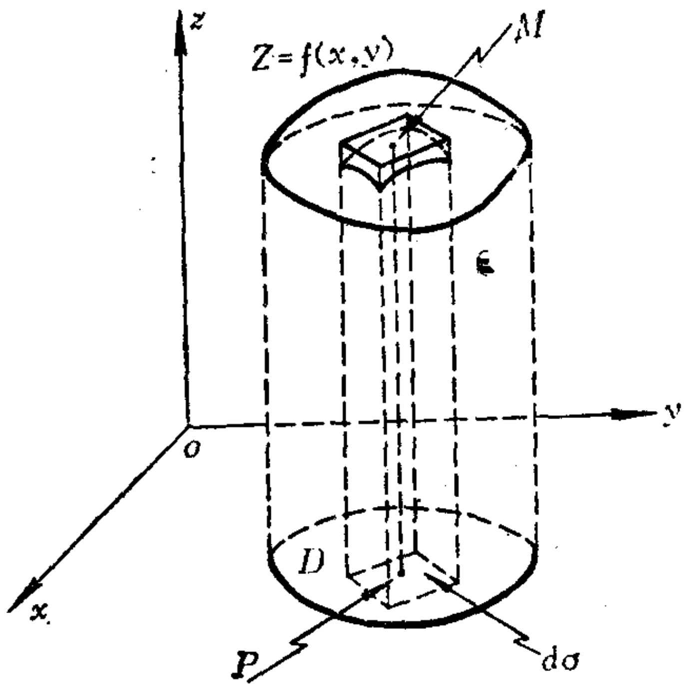


图 9—21

小片曲面(面积为ΔA)和切平面T的一小片平面（面积为dA），由于$d\sigma$很小，所以$dA\approx\Delta A$。设点M处曲面S上的法线（指向朝上）与z轴所成的角为γ，则有

$$dA=\frac{d\sigma}{\cos\gamma}.$$

又因 $$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

所以 $$dA=\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,d\sigma.$$

它就是**曲面S的面积微元**，将它在区域D上积分，即得曲面的面积

$$A=\iint_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\, d\sigma, \tag{1}$$

或写成

$$A=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy. \tag{1'}$$

同理，若曲面的方程为$x=x(y,z)$或$y=y(z,x)$，将曲面分别投影到yz面或zx面得投影区域D_{yz}或D_{zx}，则

$$A=\iint_{D_{yz}} \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dydz, \tag{1''}$$

或

$$A=\iint_{D_{zx}} \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, dzdx. \tag{1'''}$$

例 3 求球面$x^2+y^2+z^2=a^2$被柱面$x^2+y^2=ax$所截下部分的面积A.

解 如图9—22所示，由对称性，只需要计算第一卦限内的部分面积A_1，而$A=4A_1$.

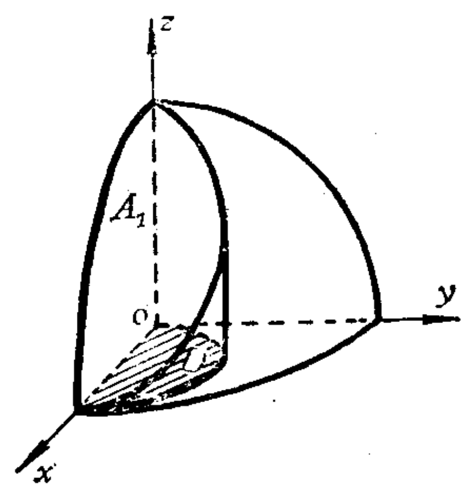


图 9—22

因$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$，

故 $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{a}{z}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$.

由公式(1′)得

$$A_1=\iint_D \frac{adxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

这里D是半圆$x^2+y^2=ax$，$y\geqslant 0$．用极坐标计算，则D的极坐标表示式为：$0\leqslant r\leqslant a\cos\theta$，$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，于是

$$A_1=a\iint_D\frac{rdrd\theta}{\sqrt{a^2-r^2}}=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{rdr}{\sqrt{a^2-r^2}}$$

$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)d\theta=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)a^2.$$

故 $A=4A_1=2(\pi-2)a^2$.

二、物理应用举例

1.平面薄片的质量

我们知道，面密度为$\mu(x, y)$的平面薄片的质量是

$$m=\iint_D\mu(x, y)d\sigma. \tag{2}$$

例 4 等腰直角三角形薄片，直角边的长为a，各点面密度与该点到直角顶点的距离平方成正比（比例常数为k），试计算这薄片的质量m.

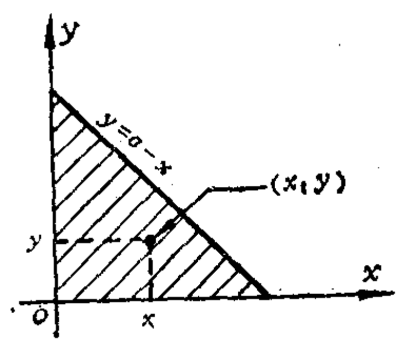


图 9—23

解 取坐标系如图9—23．则三角形薄片所占区域为D：

$0\leqslant y\leqslant a-x$，$0\leqslant x\leqslant a$.

据题意，在点(x, y)处的密度是

$\mu=k(x^2+y^2)$，于是

$$m=\iint\limits_D k(x^2+y^2)\,dxdy$$

$$=k\int_0^a dx\int_0^{a-x}(x^2+y^2)\,dy$$

$$=k\int_0^a\left[x^2y+\frac{1}{3}y^3\right]_0^{a-x}dx$$

$$=k\int_0^a\left[x^2(a-x)+\frac{1}{3}(a-x)^3\right]dx=\frac{1}{6}ka^4.$$

2. 平面薄片的重心

由力学知道，若质量为m的质点到l轴的距离为r，则$M_l=mr$叫做该质点对l轴的**静力矩**。

设xy面上有n个质点，它们位于点(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，…，(x_n,y_n)处，质量分别为m_1，m_2，…，m_n，则这质点系的重心$G(\overline{x},\overline{y})$的坐标为：

$$\overline{x}=\frac{M_y}{m}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i},\qquad \overline{y}=\frac{M_x}{m}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}.$$

其中$m=\sum_{i=1}^{n}m_i$是该质点系的总质量，$M_x=\sum_{i=1}^{n}m_iy_i$，$M_y=\sum_{i=1}^{n}m_ix_i$分别是该质点系对x轴、对y轴的静力矩。

设有一平面薄片，占有xy面上的区域D，在点(x, y)处的面密度为$\mu(x, y)$（它在D上连续），求这薄片的重心$G(\overline{x}, \overline{y})$。

如图9—24，在D内任取一小区域$d\sigma$（其面积也记作$d\sigma$）及在$d\sigma$内任取一点(x, y)，因$d\sigma$很小，故这点处的密度$\mu(x, y)$可视为$d\sigma$上各点处的密度，于是$d\sigma$的质量是$dm = \mu(x, y)d\sigma$，（dm就是薄片的质量微元，故薄片的质量$m = \iint\limits_D \mu(x, y)d\sigma$），设此质

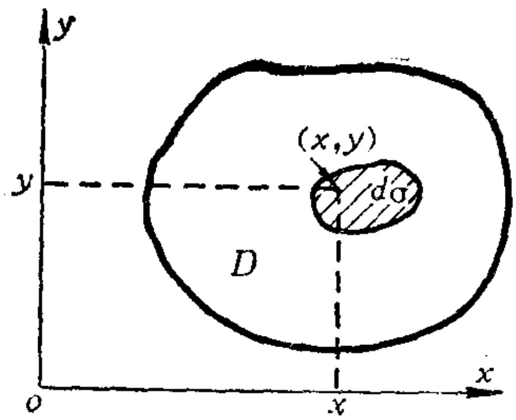


图 9—24

量都集中于点(x, y)，可分别得对x轴、对y轴的**静力矩微元**dM_x、dM_y：

$$dM_x = ydm = y\mu(x, y)d\sigma,$$

$$dM_y = xdm = x\mu(x, y)d\sigma.$$

于是

$$M_x = \iint\limits_D y\mu(x, y)d\sigma, \qquad M_y = \iint\limits_D x\mu(x, y)d\sigma,$$

所以，薄片重心坐标的公式为：

$$\overline{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint\limits_D x\mu(x, y)d\sigma}{\iint\limits_D \mu(x, y)d\sigma},$$

$$\overline{y}=\frac{M_x}{m}=\frac{\iint\limits_D y\mu(x,y)\,d\sigma}{\iint\limits_D \mu(x,y)\,d\sigma}. \tag{3}$$

如果薄片是均匀的，即面密度μ为常量，因而由公式(3)得均匀薄片重心的坐标公式为：

$$\overline{x}=\frac{1}{\sigma}\iint\limits_D x\,d\sigma,\qquad \overline{y}=\frac{1}{\sigma}\iint\limits_D y\,d\sigma, \tag{3'}$$

其中$\sigma=\iint\limits_D d\sigma$是区域$D$的面积，这时薄片的重心完全由薄片的形状所决定，所以我们把均匀平面薄片的重心叫做这平面薄片所占的平面图形的**形心**。

例 5 求例 4 中三角形薄片重心$G(\overline{x},\overline{y})$。

解 由例 4 知，此三角形薄片的质量为$m=\dfrac{ka^4}{6}$。又因

$$M_y=k\iint\limits_D x(x^2+y^2)\,d\sigma=k\int_0^a x\,dx\int_0^{a-x}(x^2+y^2)\,dy$$

$$=k\int_0^a x\left[x^2(a-x)+\frac{1}{3}(a-x)^3\right]dx=\frac{k}{15}a^5.$$

$$M_x=k\iint\limits_D y(x^2+y^2)\,d\sigma=k\int_0^a dx\int_0^{a-x}(x^2y+y^3)\,dy$$

$$=\frac{k}{2}\int_0^a\left[x^2(a-x)^2+\frac{1}{2}(a-x)^4\right]dx=\frac{k}{15}a^5.$$

由公式(3)得

$$\overline{x}=\frac{M_y}{m}=\frac{\dfrac{ka^5}{15}}{\dfrac{ka^4}{6}}=\frac{2a}{5},\quad \overline{y}=\frac{M_x}{m}=\frac{2a}{5}.$$

故得三角形薄片的重心为$G\left(\dfrac{2a}{5},\ \dfrac{2a}{5}\right)$.

例 6 求位于两圆$r=2\sin\theta$和$r=4\sin\theta$之间的均匀薄片的重心$G(\overline{x},\ \overline{y})$(图 9—25).

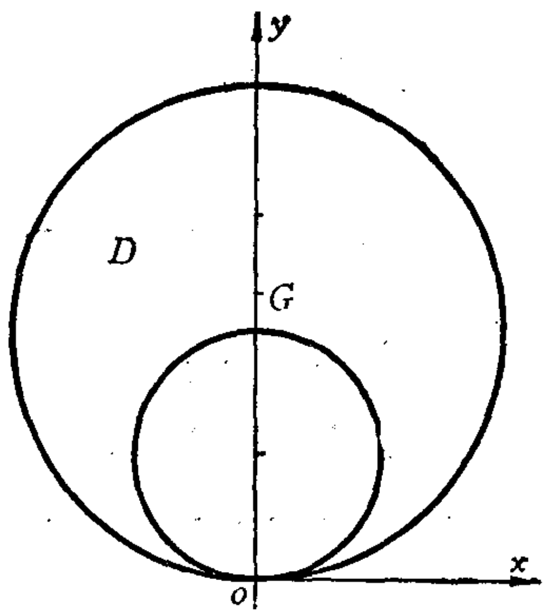


图 9—25

解 因为区域D(即薄片)对称于y轴，薄片又是均匀的，所以重心G必在y轴上，即$\overline{x}=0$，再用公式(3′)计算

$$\overline{y}=\frac{1}{\sigma}\iint_D y\,d\sigma.$$

因为D是$2\sin\theta\leqslant r\leqslant 4\sin\theta$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

故

$$\iint_D y\,d\sigma=\int_0^{\pi}d\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}r^2\sin\theta\,dr=7\pi.$$

又因为D的面积等于两圆面积之差，即$\sigma=4\pi-\pi=3\pi$.于是

$$\overline{y}=\frac{7\pi}{3\pi}=\frac{7}{3}.$$

故该薄片的重心是$G\left(0,\ \dfrac{7}{3}\right)$，它也就是$D$的形心.

3.平面薄片的转动惯量

由力学知道，若质量为m的质点到l轴的距离为r，则$I_l=mr^2$叫做该质点对于l轴的**转动惯量**.

设有一薄片占有xy面上的区域D，在点(x, y)处的密度为$\mu(x, y)$（它在D上连续），求这薄片分别对于x轴、y轴和坐标原点O的转动惯量I_x、I_y和I_o.

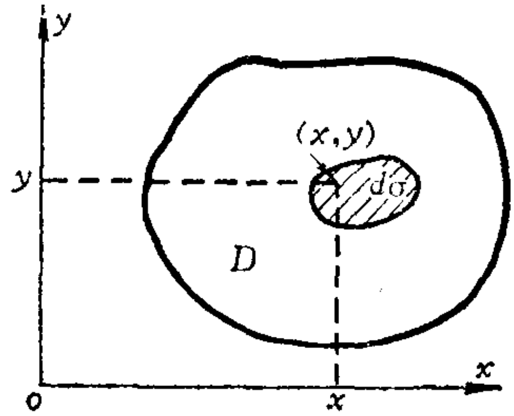


图 9—26

在区域D上任取一小区域$d\sigma$（其面积也记作$d\sigma$）及在$d\sigma$上任取一点(x, y)，由前述知道，$d\sigma$的质量是$dm=\mu(x, y)d\sigma$，并近似地视dm集中于点(x, y). 于是小薄片$d\sigma$对于x轴、y轴和坐标原点O的转动惯量分别为（图9—26）.

$$dI_x=y^2dm=y^2\mu(x, y)d\sigma,$$

$$dI_y=x^2dm=x^2\mu(x, y)d\sigma,$$

$$dI_o=(x^2+y^2)dm=(x^2+y^2)\mu(x, y)d\sigma.$$

它们就是薄片分别对于x轴、y轴和坐标原点O的**转动惯量微元**，将它们在区域D上积分便得转动惯量

$$I_x=\iint_D y^2\mu(x, y)d\sigma,\quad I_y=\iint_D x^2\mu(x, y)d\sigma,$$

$$I_o=\iint_D (x^2+y^2)\mu(x,y)d\sigma.$$

显然，有$I_o=I_x+I_y$成立.

例7 求半径为a的均匀半圆薄片（面密度是常数μ）对于其直径边的转动惯量.

解 取坐标系如图9—27。则薄片所占的区域D是：$x^2+y^2\leqslant a^2$，$y\geqslant 0$，据题意所求的转动惯量即为半圆薄片对于x轴的转动惯量I_x。

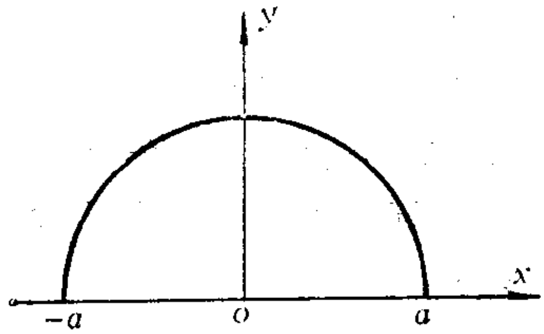


图 9—27

$$I_x=\iint\limits_D \mu y^2 d\sigma$$

$$=\mu\iint\limits_D r^3\sin^2\theta\, dr d\theta$$

$$=\mu\int_0^{\pi}\sin^2\theta\, d\theta\int_0^{a} r^3 dr=\frac{1}{8}\mu\pi a^4=\frac{1}{4}ma^2.$$

其中$m=\frac{1}{2}\mu\pi a^2$是这薄片的质量。

例8 均匀矩形薄板，长为a，宽为b，质量为m，求它对中心（即转轴通过中心且垂直于板面）的转动惯量。

解 取坐标系如图9—28。则此薄板所占的区域D是

$$-\frac{a}{2}\leqslant y\leqslant\frac{a}{2},\quad -\frac{b}{2}\leqslant x\leqslant\frac{b}{2}.$$

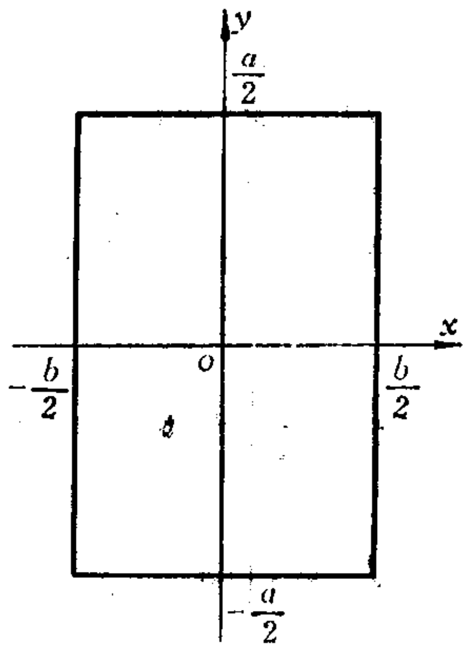


图 9—28

据题意所求的转动惯量是I_o，因薄板是均匀的，故面密度是常数$\mu=\frac{m}{ab}$，于是

$$I_o=\iint\limits_D (x^2+y^2)\mu d\sigma$$

$$=\frac{m}{ab}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}dx\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}(x^2+y^2)dy$$

$$=\frac{m}{ab}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}(ax^2+\frac{a^3}{12})dx$$

$$=\frac{m}{ab}\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{a^3}{12}x\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}=\frac{m(a^2+b^2)}{12}.$$

习 题 9—3

1．求平面$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$被三坐标面所割出部分的面积．

2．求锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$z^2=2x$所割下部分的曲面面积．

3．求球面$x^2+y^2+z^2=a^2$为平面$z=\frac{a}{4}$，$z=\frac{a}{2}$所夹部分的曲面面积．

4．求以xy面上的矩形域$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$为底，以平面$2x+3y+z=6$为顶的柱体体积．

5．求由旋转抛物面$z=x^2+y^2$，平面$x+y=1$及坐标面所围立体的体积．

6．求由$y=0$，$y=\sqrt{3}x$，$z=0$及$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$所围在第一卦限内的立体体积．

7．求由$y=0$，$y=x$，$x=1$所围成的三角形薄片的质量，其面密度为$\mu=x^2+y^2$．

8．求由螺线$r=2\theta$（$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$）与直线$\theta=\frac{\pi}{2}$所围成的平面薄片

的质量，其面密度是$\mu = x^2 + y^2$.

9．设平面薄片D由抛物线$y = x^2$及直线$y = x$所围成，其面密度为$\mu = x^2 y$，求这薄片的重心.

10．求由$y = \sqrt{2px}$，$x = x_0$，$y = 0$所围成的均匀薄片的重心.

11．求由下列曲线所围成的图形的形心：

（1）$y = 3x - x^2$，$y = x$；　　（2）$r = a(1 + \cos\theta)$.

12．在以R为半径的半圆形的直径上添加一个边与直径等长的矩形，使整个平面图形的形心落在圆心上，求矩形另一边的长.

13．求均匀薄片（面密度$\mu = 1$）D的转动惯量：

（1）D：$0 \leqslant x \leqslant a$，$0 \leqslant y \leqslant b$，求$I_x$，$I_y$；

（2）D：$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1$，求$I_y$，$I_o$；

（3）D：$y^2 = \dfrac{9}{2}x$与$x = 2$围成，求I_x，I_y.

14．求均匀圆环薄片（面密度$\mu = k$，内、外圆半径分别为a和b）对于垂直于环面且通过其中心的轴的转动惯量.

第四节　三重积分的概念及计算法

一、三重积分的概念

三重积分和二重积分类似，是三元函数的积分和式的极限.

设一立体占有空间闭区域Ω，在点(x, y, z)处的体密度是$\mu(x, y, z)$，且$\mu(x, y, z)$在Ω上连续，求这立体的质量m。

把立体任意分成n个小块，即把区域Ω任意分成n个小区域Δv_i（$i = 1, 2, \cdots, n$），这些小区域的体积也记作Δv_i，

只要各个小区域Δv_i的直径d_i很小，可视Δv_i上的质量是均匀分布的，即密度$\mu(x, y, z)$在Δv_i上是个常量（图9—29），在Δv_i上任取一点(ξ_i, η_i, ζ_i)，于是有

$$\Delta m_i \approx \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i,$$

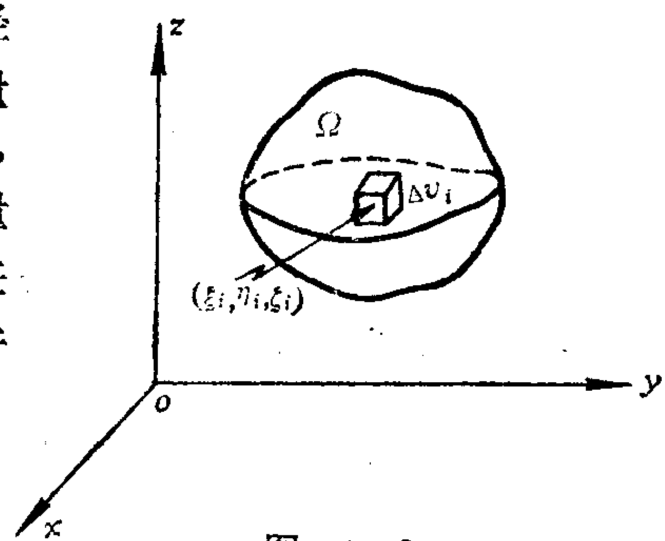


图 9—29

故

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i,$$

记$\lambda = \max\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$，则当$\lambda \to 0$时，和式$\sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$的极限值即为所求的立体的质量

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i.$$

定义 设函数$f(x, y, z)$在空间有界闭区域Ω上连续。将Ω任意分成n个小区域Δv_i($i=1, 2, \cdots, n$)，这些小区域的体积也记作Δv_i，在每个小区域Δv_i上任取一点(ξ_i, η_i, ζ_i)，作乘积$f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$($i=1, 2, \cdots, n$)，并作和式$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$，如果当各小区域直径中的最大值$\lambda \to 0$时，和式的极限存在，则称此极限为函数$f(x, y, z)$在闭区域$\Omega$上的**三重积分**，记作$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dv$，即

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i, \quad (1)$$

其中dv叫做**体积元素**(其它术语与二重积分的类同)。

由此可知，空间立体的质量是它的体密度$\mu(x, y, z)$在立体所占闭区域Ω上的三重积分

$$m=\iiint_{\Omega}\mu(x, y, z)dv. \quad (2)$$

可以证明，当$f(x,y,z)$在Ω上连续时，积分和式的极限就一定存在，它与Ω的分法和点(ξ_i,η_i,ζ_i)的取法是无关的．因此，在直角坐标系中，我们用平行于坐标面的三族平面来分区域Ω，所得的小区域Δv_i绝大部分是长方体，并设其边长为Δx_i，Δy_i，Δz_i，则$\Delta v_i=\Delta x_i\Delta y_i\Delta z_i$，因此$dv=dxdydz$，于是

$$\iiint_{\Omega}f(x,y,z)dv=\iiint_{\Omega}f(x,y,z)dxdydz, \quad (3)$$

其中$dxdydz$叫做**直角坐标系中的体积元素**．

三重积分具有与二重积分类似的性质；我们不再一一叙述。不难知道，如果在空间区域Ω上$f(x, y, z)=1$，则$V=\iiint_{\Omega}dv$在数值上正是积分区域Ω的体积．

二、三重积分的计算法

跟二重积分类似，三重积分的计算方法是将三重积分化为**三次积分**，下面我们分别介绍直角坐标、柱面坐标和球面坐

标三种坐标系下的三重积分化为三次积分的方法。

1. 在直角坐标系中的计算法

直角坐标系中的三重积分是$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$，现在我们介绍将它化为三次积分的方法。

假设平行于z轴的任何直线与区域Ω的边界曲面S相交不多于两点，把区域Ω投影到xy面上得到平面区域D_{xy}（图9—30）。投影柱面与曲面S的交线把曲面S分成上下两部分，其方程分别为：

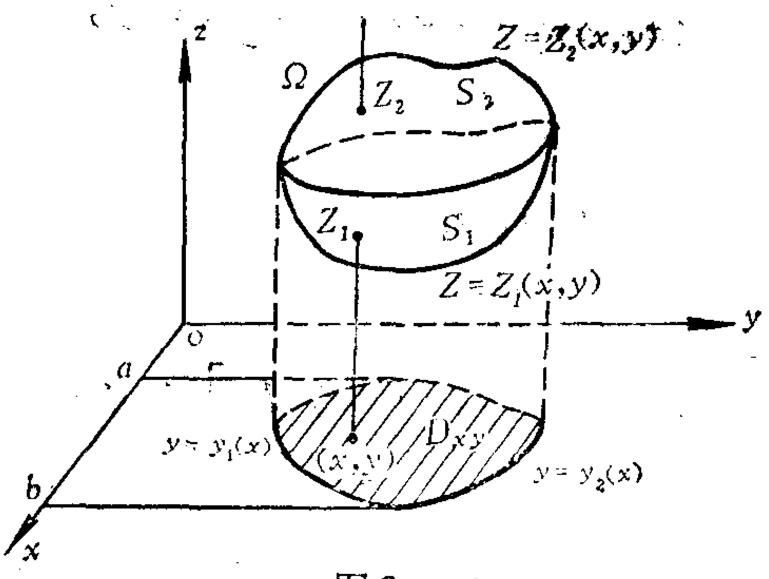


图9—30

下部S_1：$z=z_1(x, y)$，

上部S_2：$z=z_2(x, y)$，

这里$z_1(x, y)$和$z_2(x, y)$在D_{xy}上都连续，且$z_1(x, y)\leqslant z_2(x, y)$，过$D_{xy}$内任意一点$(x, y)$作平行于$z$轴的直线通过曲面$S_1$穿入$\Omega$内，然后又通过曲面$S_2$穿出$\Omega$外，穿入点与穿出点的竖标分别为$z_1(x, y)$与$z_2(x, y)$，故在区域$\Omega$

上，竖标z的变化范围是：

$$z_1(x, y) < z \leqslant z_2(x, y),$$

所以，先将x、y看作定值，把$f(x, y, z)$仅看作是z的函数，在区间$[z_1(x, y), z_2(x, y)]$上对z积分，其结果是x、y的函数，记作$F(x, y)$，即

$$F(x, y) = \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)dz.$$

然后再计算$F(x, y)$在区域D_{xy}上的二重积分

$$\iint\limits_{D_{xy}} F(x, y)dxdy$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)dz\right] dxdy,$$

就得

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz\right] dxdy,$$

再将D_{xy}上的二重积分化为二次积分，假若区域D_{xy}用不等式

$$y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

来表示，即有

$$\iint\limits_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)dz\right] dxdy$$

$$= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz,$$

这样，便得到三重积分的计算公式：

$$\iiint\limits_{D} f(x, y, z)dxdydz$$

$$=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x, y, z)dz. \quad (4)$$

(4)式就是把三重积分化为先对z、再对y、最后对x的三次积分公式，其积分限由x、y、z在Ω上的变化范围确定。

如果平行于坐标轴的直线与Ω的边界面S的交点多于两个，则可仿照二重积分，把Ω分成若干部分区域，使在Ω上的三重积分等于各部分区域上的三重积分之和。

例 1 将三重积分$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz$化为三次积分，其中积分区域$\Omega$是由旋转抛物面$z=x^2+y^2$与平面$z=1$所围成。

解 积分区域Ω如图9—31所示，区域Ω投影到xy面上，投影区域D_{xy}是圆域$x^2+y^2\leqslant 1$。由于过D_{xy}上任意一点(x, y)作平行于z轴的直线通过下部曲面S_1：$z=x^2+y^2$穿入Ω并通过上部曲面S_2：$z=1$穿出Ω，于是z的变化范围是

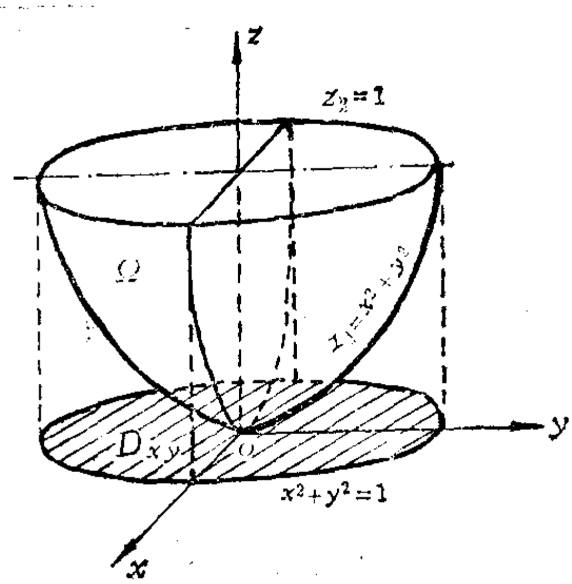


图 9—31

$$x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1,$$

故得

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\left[\int_{x^2+y^2}^{1} f(x,\ y,\ z)\,dz\right]dxdy.$$

因D_{xy}可用不等式

$$-\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2},\quad -1\leqslant x\leqslant 1.$$

表示，故三重积分可化为三次积分

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,\ y,\ z)\,dxdydz$$

$$=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{x^2+y^2}^{1}f(x,\ y,\ z)dz.$$

综上所述，本题的积分次序先对z积分，后对y积分，最后对x积分，其积分限由x、y、z在Ω上的变化范围

$$x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1,\ -\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2},\ -1\leqslant x\leqslant 1$$

所确定.

例2 计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega} x\,dxdydz$，其中$\Omega$由三个坐标面及平面$x+2y+z=1$所围成.

解 积分区域Ω如图9—32所示.

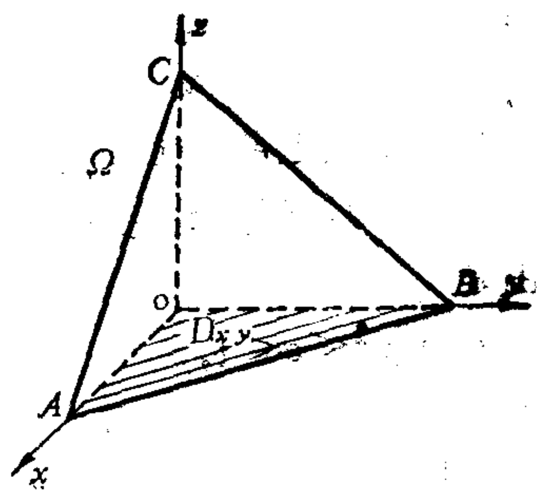


图 9—32

将Ω投影到xy面上，得到投影区域为三角形OAB，直线OA、OB及AB的方程依次为$y=0$，$x=0$及$x+2y=1$，所以D_{xy}可用不等式

$$0\leqslant y\leqslant\frac{1-x}{2},\quad 0\leqslant x\leqslant 1$$

表示，由于过D_{xy}上的任一点$(x,\ y)$作平行于z轴的直线是从平面$z=0$穿入Ω内，再通过平面$z=1-x-2y$穿出Ω外，故z的变化范围是

$$0\leqslant z\leqslant 1-x-2y,$$

于是Ω为

$$0\leqslant z\leqslant 1-x-2y,\quad 0\leqslant y\leqslant\frac{1-x}{2},\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

故得

$$\iiint_{\Omega} x\,dx\,dy\,dz=\int_0^1 x\,dx\int_0^{\frac{1-x}{2}}dy\int_0^{1-x-2y}dz$$

$$=\int_0^1 x\,dx\int_0^{\frac{1-x}{2}}(1-x-2y)\,dy$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1(x-2x^2+x^3)\,dx=\frac{1}{48}.$$

2.在柱面坐标系中的计算法

(1) 柱面坐标的概念：

若空间一点$M(x,\ y,\ z)$在xy面上的投影P的极坐标为$(r,\ \theta)$ $(0\leqslant r<+\infty,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$，则数组$r,\ \theta,\ z$与点$M$成一一对应，我们称$r,\ \theta,\ z$（任意实数）为点$M$的柱面坐标，记作$M(r,\ \theta,\ z)$（图9—33），这里，$r$表示点$M$到$z$轴的距离；$\theta$表示过$z$轴和点$M$的半平面与$zx$面的夹角；$z$表示点$M$的竖标。

三组坐标面分别为：

$r=$常数，即以 z 轴为轴的圆柱面；

$\theta=$常数，即以 z 轴为界的半平面；

$z=$常数，即与 xy 面平行的平面.

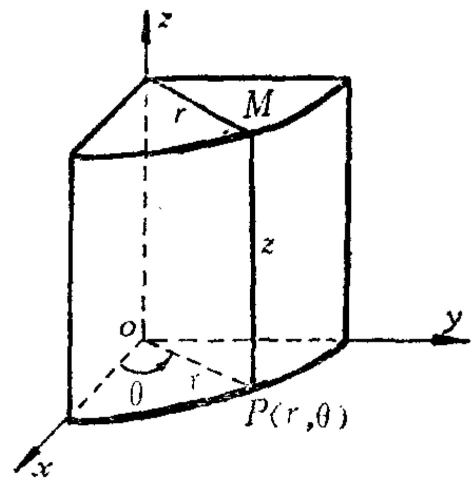


图 9—33

因而，如点 $M_0(r_0,\theta_0,z_0)$ 就是圆柱面 $r=r_0$，半平面 $\theta=\theta_0$，平面 $z=z_0$ 的交点。

又因为 r，θ 是点 P 的极坐标．故点 M 的直角坐标与柱面坐标有如下的关系式：

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta, \\ z=z. \end{cases} \tag{5}$$

（2）利用柱面坐标计算三重积分：

我们来讨论如何将三重积分 $\iiint\limits_D f(x,y,z)dv$ 化为柱面坐标的三重积分，为此，用三组坐标面 $r=r_i$，$\theta=\theta_i$，$z=z_i$ 把 Ω 分成 n 个小区域，各小区域绝大部分为柱体，且可近似看成棱长分别为 $rd\theta$、dr、dz 的长方体(图9—34)，小区域的体积 dv 等于底面积乘高，这里高是 dz，底面积是 $rdrd\theta$（即极坐标系中的面积元素），于是有

$$dv=rdrd\theta dz.$$

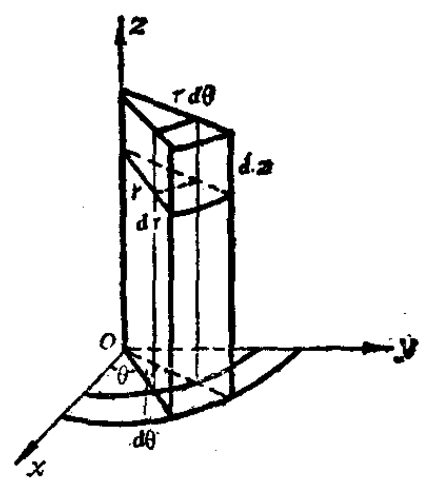


图 9—34

这就是柱面坐标系中的体积元素。

再将(5)式代入 $f(x, y, z)$ 中即可得 $f(x, y, z) = f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) = F(r, \theta, z)$.

所以

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Omega} F(r,\theta,z)rdrd\theta dz. \quad (6)$$

(6)式即为三重积分由直角坐标变换为柱面坐标的公式，其右端就是柱面坐标的三重积分。

柱面坐标的三重积分的计算，同样是化为三次积分来进行的，化为三次积分时的积分限由r、θ、z在积分区域Ω中的变化范围来确定，下面通过例子来说明。

例 3 利用柱面坐标计算三重积分$\iiint_{\Omega} zdxdydz$，其中区域Ω为半球体$x^2+y^2+z^2\leqslant 1$，$z\geqslant 0$。

解 把区域Ω投影到xy面上，得投影区域为D_{xy}：$x^2+y^2\leqslant 1$，在D_{xy}上任取一点(x, y)，过此点作z轴的平行直线由平面$z=0$穿入Ω再经上半球面$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$穿出Ω，即z的变化范围是$0\leqslant z\leqslant\sqrt{1-x^2-y^2}$.积分区域$\Omega$可用不等式

$$0\leqslant z\leqslant\sqrt{1-r^2}, \quad 0\leqslant r\leqslant 1, \quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

来表示，

于是 $$\iiint_{\Omega} zdxdydz = \iiint_{\Omega} zrdrd\theta dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 rdr \int_0^{\sqrt{1-r^2}} zdz$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\pi\int_0^1 (1-r^2)dr = \frac{\pi}{4}.$$

例 4 求体密度为$\mu(x, y, z)=\sqrt{x^2+y^2}$的立体的

质量m，立体由曲面$z=2\sqrt{x^2+y^2}$与平面$z=2$围成(图9—35)。

解 体密度为$\mu(x, y, z)=\sqrt{x^2+y^2}$的立体的质量为

$$m=\iiint_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,dv,$$

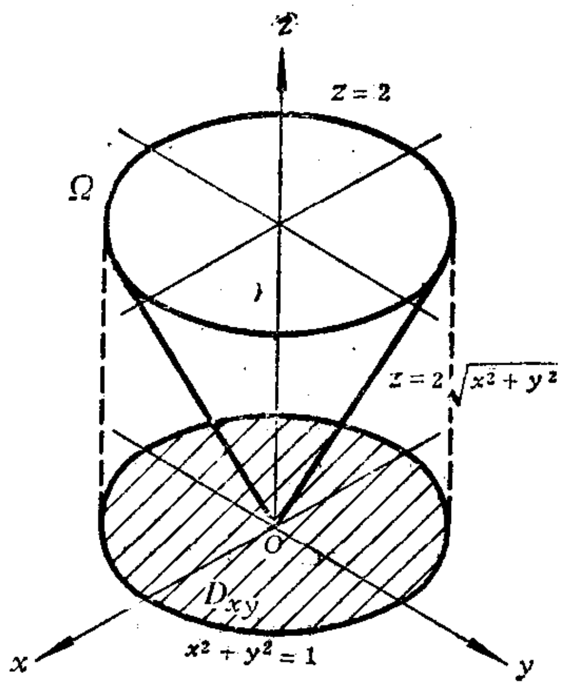


图 9—35

这里Ω由$z=2\sqrt{x^2+y^2}$与$z=2$围成，将Ω投影到xy面上，得区域D_{xy}是圆域$x^2+y^2\leqslant 1$，过D_{xy}上的任一点(x, y)作z轴的平行直线由$z=2\sqrt{x^2+y^2}$穿入Ω并通过$z=2$穿出Ω，故z的变化范围是$2\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 2$。积分区域$\Omega$可用不等式

$$2r\leqslant z\leqslant 2,\quad 0\leqslant r\leqslant 1,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

来表示，故

$$m=\iiint_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,dv=\iiint_{\Omega}r^2\,dr\,d\theta\,dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2\,dr\int_{2r}^2 dz$$

$$=4\pi\int_0^1 r^2(1-r)\,dr=\frac{\pi}{3}.$$

3.在球面坐标系中的计算法

(1) 球面坐标的概念:

设$M(x, y, z)$为空间内一点，若记r为原点O到点M

的距离；有向线段$\overrightarrow{OM}$与z轴正向间的夹角记为φ；过z轴和点M的半平面与zx面的夹角记为θ（φ，θ的方向如图9—36所示），我们规定它们的变化范围为：

$$0\leqslant r<+\infty,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,$$

则数组r，θ，φ与点M成一一对应，称r，θ，φ为点M的**球面坐标**，记作$M(r,\ \theta,\ \varphi)$（图9—36）。三组坐标面分别为：

$r=$常数，即以原点O为球心的球面；

$\theta=$常数，即以z轴为界的半平面；

$\varphi=$常数，即以原点O为顶点，z轴为轴的圆锥面。

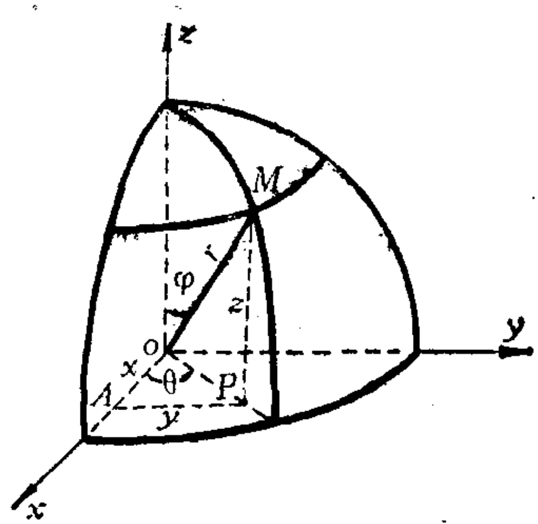


图 9—36

因而，如点$M_0(r_0,\ \theta_0,\ \varphi_0)$就是球面$r=r_0$，半平面$\theta=\theta_0$和圆锥面$\varphi=\varphi_0$的交点。

设点M在xy面上的投影为P，点P在x轴上的投影为A，则$OA=x$，$AP=y$，$PM=z$，又

$$OP=r\sin\varphi,\quad z=r\cos\varphi,$$

而$x=OP\cos\theta$，$y=OP\sin\theta$，故点M的直角坐标与球面坐标有如下关系式：

$$\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta, \\ y=r\sin\varphi\sin\theta, \\ z=r\cos\varphi. \end{cases} \tag{7}$$

显然 $x^2+y^2+z^2=r^2$。

(2) 利用球面坐标计算三重积分：

我们来讨论如何将三重积分$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dv$化为球面坐标的三重积分. 用三组坐标面 $r=r_i$, $\theta=\theta_i$, $\varphi=\varphi_i$把Ω分成 n 个小区域dv, 并把dv近似地看作是一个长方体, 其三条棱之长分别为 $rd\varphi$, $r\sin\varphi\, d\theta$, dr（图9—37）。于是小区域的体积为

$$dv=r^2\sin\varphi\, drd\theta d\varphi. \tag{8}$$

(8)式即为**球面坐标系中的体积元素**。

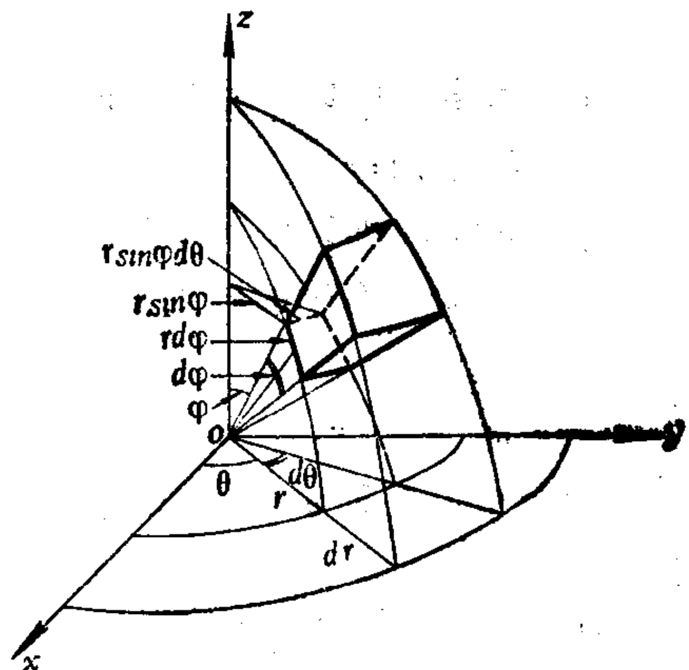


图 9—37

再利用(7)式来代换$f(x, y, z)$中的x、y、z便得：

$$f(x, y, z)=f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)=F(r, \theta, \varphi).$$

所以

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega} F(r, \theta, \varphi)r^2\sin\varphi drd\theta d\varphi. \tag{9}$$

(9)式即为三重积分由直角坐标变换为球面坐标的公式。

球面坐标的三重积分的计算，同样是化为对 r、对 φ、对 θ 的三次积分来进行的，我们也用例子来说明。

例 5 利用球面坐标计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv$，其中$\Omega$：$x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$，$z\geqslant 0$。

解 Ω是半球体，用不等式表示为

$$0\leqslant r\leqslant a,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

于是

$$I=\iiint\limits_{\Omega}r^2\cdot r^2\sin\varphi drd\theta d\varphi$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^4dr=\frac{2}{5}\pi a^5.$$

关于空间立体重心和转动惯量，我们可仿照二重积分给出它们的计算公式如下：

设有体密度为$\mu(x,y,z)$的立体，则其重心$G(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$的坐标为

$$\overline{x}=\frac{M_{yz}}{m},\quad\overline{y}=\frac{M_{zx}}{m},\quad\overline{z}=\frac{M_{xy}}{m},\tag{10}$$

其中$m=\iiint\limits_{\Omega}\mu(x,y,z)dv$为立体的质量；

$M_{yz}=\iiint\limits_{\Omega}x\mu(x,y,z)dv$，$M_{zx}=\iiint\limits_{\Omega}y\mu(x,y,z)dv$，

$M_{xy}=\iiint\limits_{\Omega}z\mu(x,y,z)dv$ 分别是立体对于yz面，zx面，xy面的静力矩，Ω为立体所占的空间闭区域。

立体对于x轴、y轴、z轴及坐标原点O的转动惯量分别为：

$$\left.\begin{aligned}
I_x &= \iiint_\Omega (y^2+z^2)\mu(x, y, z)\,dv, \\
I_y &= \iiint_\Omega (z^2+x^2)\mu(x, y, z)\,dv, \\
I_z &= \iiint_\Omega (x^2+y^2)\mu(x, y, z)\,dv, \\
I_0 &= \iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\mu(x, y, z)\,dv.
\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

例 6 求均匀半球体的重心。

解 设球半径为a，体密度为μ（常数），取半球体的对称轴为z轴，坐标原点取在球心上，则半球体所占空间区域Ω即为：

$$x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2,\quad z \geqslant 0.$$

因半球体是均匀的，且具有对称性，故$\bar{x}=\bar{y}=0$，而

$$\bar{z}=\frac{1}{m}\iiint_\Omega z\mu\,dv=\frac{1}{V}\iiint_\Omega z\,dv,$$

其中$V=\frac{2}{3}\pi a^3$是半球体的体积，用球面坐标计算$\iiint_\Omega z\,dv$，因Ω为$0 \leqslant r \leqslant a$，$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$，$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$，故

$$\iiint_\Omega z\,dv = \iiint_\Omega r\cos\varphi \cdot r^2\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi \int_0^a r^3\,dr$$

$$=2\pi\cdot\left[\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{4}\left[r^4\right]_0^a=\frac{1}{4}\pi a^4.$$

因此，$\overline{z}=\frac{3}{8}a$，即半球体的重心为$G\left(0,\ 0,\ \frac{3}{8}a\right)$.

习 题 9—4

1．化三重积分$\iiint\limits_{\Omega}f(x,\ y,\ z)\,dxdydz$为三次积分，其中积分区域$\Omega$分别由下列曲面围成：

(1) $z=\sqrt{x^2+y^2}$及$z=1$；

(2) $z=x^2+2y^2$及$z=2-x^2$；

(3) $z=x^2+y^2$，$y=x^2$，$z=0$及$y=1$.

2．利用直角坐标计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_{\Omega}xy^2z^3\,dxdydz$，$\Omega$由$y=0$，$y=x$，$z=0$，$z=1$及$x=1$所围成；

(2) $\iiint\limits_{\Omega}xyz\,dxdydz$，$\Omega$为球面$x^2+y^2+z^2=1$及三个坐标面所围成的在第一卦限内的部分；

(3) $\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$，$\Omega$由$x=0$，$y=0$，$z=0$及$x+y+z=1$围成.

3．利用柱面坐标计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_{\Omega}z\,dv$，$\Omega$由$x^2+y^2+z^2=2$及$z=\sqrt{x^2+y^2}$围成；

(2) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,dv$，$\Omega$由$x^2+y^2=2z$及$z=2$围成.

4．利用球面坐标计算下列三重积分：

(2) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,dv$，$\Omega$：$x^2+y^2+z^2\leqslant 1$；

(2) $\iiint\limits_{\Omega}z\,dv$，$\Omega$由$x^2+y^2+(z-a)^2\leqslant a^2$，$x^2+y^2\leqslant z^2$围成.

5．将下列三次积分化为柱面或球面坐标的三次积分，并计算其值：

(1) $\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,dz$；

(2) $\int_{-R}^{R}dx\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}dy\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz$.

6．选用适当的坐标计算：

(1) $\iiint\limits_{\Omega}xy\,dv$，$\Omega$由$x^2+y^2=1$，$z=0$，$z=1$，$x=0$及$y=0$所围在第一卦限内的部分；

(2) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,dv$，$\Omega$由$x^2+y^2+z^2=z$围成；

(3) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,dv$，$\Omega$由$4z^2=25(x^2+y^2)$及$z=5$围成；

(4) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,dv$，$\Omega$由$z=\sqrt{A^2-x^2-y^2}$，$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ $(A>a>0)$及$z=0$围成；

(5) $\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\,dv$，$\Omega$：$x^2+y^2+z^2\leqslant 1$.

7．利用三重积分计算下列各组曲面所围成的立体的体积：

（1）$z=6-x^2-y^2$及$z=\sqrt{x^2+y^2}$；

（2）$x^2+y^2+z^2=2az$（$a>0$）及$x^2+y^2=z^2$（含z轴的部分）；

（3）$z=\sqrt{x^2+y^2}$及$z=x^2+y^2$.

8．求下列物体的质量：

（1）物体是球心在原点、半径为R的球体，在其上任意一点的体密度与这点到球心的距离成正比.

（2）物体占有空间区域Ω：$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$，$0\leqslant z\leqslant 1$，在点（x，y，z）处的密度为$\mu(x,y,z)=x+y+z$.

9．利用三重积分计算下列各组曲面所围立体的重心(设$\mu=1$)：

（1）$z^2=x^2+y^2$，$z=1$；

（2）$z=x^2+y^2$，$x+y=a$，$x=0$，$y=0$，$z=0$.

10．一均匀物体（密度μ为常数）占有的区域Ω是由$z=0$，$z=x^2+y^2$和$|x|=a$，$|y|=a$围成，

（1）求其质量；

（2）求其重心；

（3）求其关于z轴的转动惯量I_z.

复 习 题 九

1．将二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$化为二次积分：

（1）D由$x=1$，$x=3$，$3x-2y+1=0$及$3x-2y+4=0$围成；

（2）D由$(x+1)^2+(y+1)^2=4$围成；

（3）D是$r^2=a^2\cos2\theta$，$r^2=a^2\sin2\theta$在第一象限内的公共部分；

（4）D由$a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant A^2$（$A>a>0$），$y\geqslant|x|$围成.

2．改换下列二次积分的积分次序：

（1）$\int_{-1}^{1}dy\int_{\sqrt{2+y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,\ y)dx$；

（2）$\int_{0}^{1}dy\int_{-1}^{-\sqrt{y}}f(x,\ y)dx+\int_{0}^{1}dy\int_{\sqrt{y}}^{1}f(x,\ y)dx$；

（3）$\int_{-a}^{0}dx\int_{-x}^{a}f(x,\ y)dy+\int_{0}^{\sqrt{a}}dx\int_{x^2}^{a}f(x,\ y)dy$.

3．计算下列二重积分：

（1）$\iint\limits_{D}e^{x+y}d\sigma$，$D$由$y=0$，$y=\ln x$及$x=2$围成；

（2）$\iint\limits_{D}\ln(x^2+y^2)d\sigma$，$D$由$1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$围成．

4．将三重积分$\iiint\limits_{\Omega}f(x,\ y,\ z)dv$化为三次积分：

（1）Ω由$z=x^2+y^2$，$2x+2y+z=2$围成；

（2）Ω由$y=x^2+z^2$，$y=2-x^2-z^2$围成．

5．计算下列三重积分：

（1）$\iiint\limits_{\Omega}y\cos(z+x)dv$，$\Omega$由$y=\sqrt{x}$，$y=0$，$x=0$，$x+z=\dfrac{\pi}{2}$围成；

（2）$\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{dv}{1+x^2+y^2}$，$\Omega$由$x^2+y^2=z^2$，$z=1$围成；

（3）$\iiint\limits_{\Omega}z\sqrt{x^2+y^2}\,dv$，$\Omega$由$y=\sqrt{2x-x^2}$，$z=0$，$z=1$，$y=0$围成；

（4）$\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{dv}{x^2+y^2+z^2}$，$\Omega$由$z=\sqrt{x^2+y^2}$，

$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$围成.

6．求直线$y=x$，由$x=0$至$x=4$的一段线段绕x轴旋转一周所得的旋转曲面的面积.

7．求由圆柱面$x^2+y^2=R^2$及$x^2+z^2=R^2$所围立体的表面积和体积.

8．求由$x^2+y^2+z^2=2$与$z^2=3(x^2+y^2)$所围在锥面内部的立体体积.

9．设平面薄片D由直线$x+y=2$，$y=x$和$y=0$所围成，它的面密度为$\mu=x^2+y^2$，求这薄片的质量.

10．求由下列曲线所围成的图形的形心：

（1）$ay=x^2$，$x+y=2a$　　（$a>0$）；

（2）$r=a\cos\theta$，$r=b\cos\theta$　（$0<a<b$）.

11．球体$x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz$内，各点处的体密度等于该点到坐标原点的距离的平方，求这球体的重心.

12．求均匀半圆片$x^2+y^2\leqslant R^2$，$y\geqslant 0$关于通过其圆心并垂直于该圆片面的轴的转动惯量.（密度$\mu=1$）

13．求由$y=x^2$及$y=1$所围成的均匀薄片对于直线$y=-1$的转动惯量（密度$\mu=1$）.

第十章　曲线积分与曲面积分

曲线积分与曲面积分，也是一种和式的极限，它的积分域是曲线弧与曲面。本章将介绍这两种积分的概念和计算方法。

第一节　对弧长的曲线积分

一、对弧长的曲线积分的概念

在 xy 面上有一条质量不均匀的物质曲线段 L（如图10—1），设曲线段 L 上任一点 (x, y) 的线密度为 $\mu(x, y)$，求曲线段 L 的质量 m。

在曲线段 L 上依次任取一组点 $A=M_0$，M_1，…，M_{n-1}，$M_n=B$。将曲线 L 分成 n 个小弧段 $\widehat{M_0M_1}$，$\widehat{M_1M_2}$，…，$\widehat{M_{n-1}M_n}$。

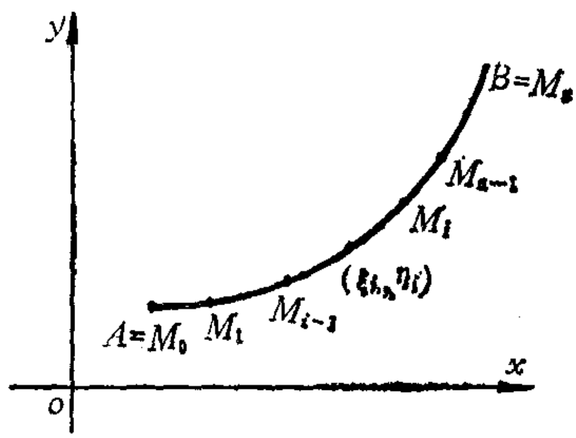


图　10—1

当各小弧段很短时，各小弧段的质量可近似地看成是均匀分布的，在第 i 个小弧段 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 上任取一点 (ξ_i, η_i)，$\mu(\xi_i, \eta_i)$ 可近似看成是小弧段 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 的线密度，从而 $\mu(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$（$i=1, 2, \cdots, n$）

即为小弧段$\widehat{M_{i-1}M_i}$质量的近似值，其中Δs_i表示第i个小弧段$\widehat{M_{i-1}M_i}$的长度，于是和式

$$\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\ \eta_i)\Delta s_i$$

即为曲线段L质量的近似值，记$\lambda=\max\{\Delta s_1,\ \Delta s_2,\ \cdots,\ \Delta s_n\}$，则当$\lambda\to0$时，和式的极限值即为所求曲线弧段的质量，

即
$$m=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\ \eta_i)\Delta s_i.$$

这样，我们遇到了与过去不同的一类和式极限，抽去它的物理意义就得到对弧长的曲线积分的定义。

定义 设函数$f(x,\ y)$在xy面内的光滑曲线L*上连续，用L上的点$A=M_0,\ M_1,\ \cdots,\ M_n=B$把$L$分成$n$个小弧段$\widehat{M_{i-1}M_i}$（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$），设第$i$个小弧段的长度为$\Delta s_i$，记$\lambda=\max\{\Delta s_1,\ \Delta s_2,\ \cdots,\ \Delta s_n\}$。在第$i$个小弧段上任取一点（$\xi_i$，$\eta_i$），如果极限

$$\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta s_i$$

存在，则称此极限为函数$f(x,\ y)$在曲线L上对弧长的曲线积分，记作$\int_L f(x,\ y)ds$，即

$$\int_L f(x,\ y)\,ds=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta s_i, \qquad (1)$$

---

* 如果曲线上各点处都具有切线且当切点连续移动时切线也连续转动，则称此曲线是光滑的。

其中L叫做**积分路线**（或积分路径），$f(x, y)$叫做**被积函数**，ds叫做**弧长元素**。

于是，前面所述曲线段L的质量等于线密度$\mu(x, y)$在L上对弧长的曲线积分，即

$$m=\int_L \mu(x, y)\, ds$$

如果L是封闭曲线，函数$f(x, y)$在L上对弧长的曲线积分记为$\oint_L f(x, y)\, ds$。

应当指出，如果$f(x, y)$在光滑曲线L上连续，那么，无论L如何分法，点(ξ_i, η_i)如何取法，(1)式右端的极限必存在。

上述定义可推广到空间曲线Γ的情况：

$$\int_\Gamma f(x, y, z)\, ds=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i,$$

其中Γ是一条空间光滑曲线，函数$f(x, y, z)$在Γ上连续。

二、对弧长的曲线积分的性质

性质1° 设L可分成两段光滑曲线L_1及L_2，记$L=L_1+L_2$，则

$$\int_{L_1+L_2} f(x, y)\, ds=\int_{L_1} f(x, y)\, ds+\int_{L_2} f(x, y)\, ds.$$

性质2° 对弧长的曲线积分与曲线L的方向（由A到B或由B到A）无关，即

$$\int_{L(AB)} f(x, y)\, ds=\int_{L(BA)} f(x, y)\, ds.$$

三、对弧长的曲线积分的计算法

1．设曲线L的方程为

$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$（$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$），且$\varphi'(t)$与$\psi'(t)$在$[\alpha,\beta]$上连续，$t=\alpha$，$t=\beta$分别对应于曲线$L$的两个端点，$f(x,y)$在$L$上连续，则

$$\int_L f(x,y)\,ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt\,,\quad(2)$$

证明从略。

公式（2）表明，计算$\int_L f(x,y)\,ds$时，只要把x、y、ds依次换为$\varphi(t)$、$\psi(t)$、$\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$，然后从$\alpha$到$\beta$作定积分就可以了。

2．设曲线L的方程为

$y=y(x)$（$a\leqslant x\leqslant b$），且$y'(x)$在$[a,b]$上连续．取x为参数，由（2）得

$$\int_L f(x,y)\,ds=\int_a^b f[x,y(x)]\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx\text{．}\quad(3)$$

设曲线L的方程为

$x=x(y)$（$c\leqslant y\leqslant d$），且$x'(y)$在$[c,d]$上连续，类似于（3），有

$$\int_L f(x,y)\,ds=\int_c^d f[x(y),y]\sqrt{1+x'^2(y)}\,dy\text{．}\quad(4)$$

类似于（2），若空间曲线Γ的方程为$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，$z=\omega(t)$（$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$），且$\varphi'(t)$、$\psi'(t)$、$\omega'(t)$在$[\alpha,\beta]$上连续，$t=\alpha$、$t=\beta$分别对应于曲线$\Gamma$的两个端点，函数$f(x,y,z)$在$\Gamma$上连续，则

$$\int_\Gamma f(x,\ y,z)\,ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\ \psi(t),\ \omega(t)]$$
$$\cdot\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}\,dt. \qquad (5)$$

注意：因为 ds 为正数，所以，公式(2)—(5)中的积分下限必须小于积分上限。

例 1 计算$\int_L xy\,ds$，曲线L是$x=a\cos t$，$y=a\sin t$，其中$a>0$，$0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$。

解 $x'=-a\sin t$，$y'=a\cos t$，

$$\sqrt{x'^2+y'^2}=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t}=a,$$

由(2)有

$$\int_L xy\,ds=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos t\cdot a\sin t\cdot a\,dt$$
$$=\frac{a^3}{2}\sin^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^3}{2}.$$

例 2 计算$\int_L\sqrt{y}\,ds$，其中L分别是：(1) $y=x$上点$O(0,0)$与$B(1,1)$之间的一段弧；(2) $y=x^2$上点$O(0,0)$与$B(1,1)$之间的一段弧（图10—2）.

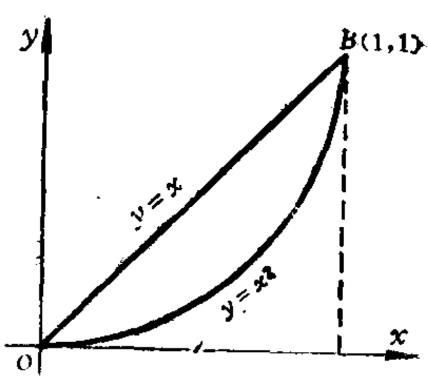


图 10—2

解 (1) $y=x$，$y'=1$，

$\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{2}$。由(3)有

$$\int_L\sqrt{y}\,ds=\int_0^1\sqrt{x}\cdot\sqrt{2}\,dx=\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1$$
$$=\frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

（2）$y=x^2$，$y'=2x$，$\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+4x^2}$。

由（3）有

$$\int_L\sqrt{y}\,ds=\int_0^1\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+4x^2}\,dx=\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{12}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)。$$

例 3 计算$\int_L yds$，其中L是$y^2=2x$上点$O(0,0)$与$B(2,2)$之间的一段弧（图10—3）。

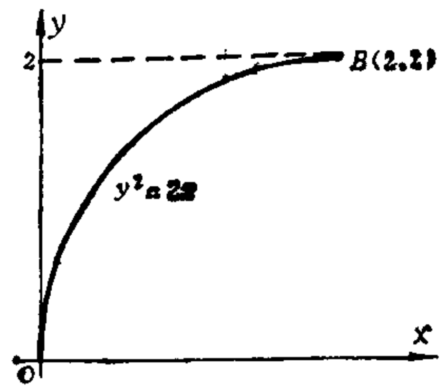


图 10—3

解 $y^2=2x$，$x'=y$，

$\sqrt{1+x'^2}=\sqrt{1+y^2}$，由(4)有

$$\int_L yds=\int_0^2 y\sqrt{1+y^2}\,dy$$

$$=\frac{1}{3}(1+y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2$$

$$=\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-1)。$$

例 4 计算$\int_\Gamma\frac{ds}{x^2+y^2+z^2}$，其中$\Gamma$是螺线$x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=bt$（$0\leqslant t\leqslant 2\pi$）。

解 $x'=-a\sin t$，$y'=a\cos t$，$z'=b$，

$$\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}=\sqrt{a^2+b^2}。$$

由（5）有

$$\int_\Gamma\frac{ds}{x^2+y^2+z^2}=\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2t^2}\,dt$$

$$=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\left(\operatorname{arctg}\frac{bt}{a}\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\operatorname{arctg}\frac{2\pi b}{a}。$$

习　题　10—1

1.设在xy面上有一条分布着质量的曲线L，在点(x, y)处的线密度为$\mu(x, y)$，试用对弧长的曲线积分表达：

(1)这曲线对x轴、对y轴及对原点O的转动惯量I_x、I_y及I_O；

(2)这曲线的重心坐标.

2.计算下列对弧长的曲线积分：

(1)$\int_L (x+y)ds$，其中L为连接点$(1,0)$及$(0,1)$的直线段；

(2)$\oint_L (x+y)ds$ 其中L为以$O(0, 0)$，$A(1,0)$和$B(0, 1)$为顶点的三角形边界；

(3)$\oint_L xds$，其中L为由直线$y=x$及抛物线$y=x^2$围成的区域的整个边界；

(4)$\int_L yds$，其中L为抛物线$y^2=2px$由点$(0, 0)$到(x_0, y_0)的一段；

(5)$\int_L (x^2+y^2)^n ds$，其中L为圆周$x=a\cos t$，$y=a\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$；

(6)$\int_L (x^2+y^2)ds$，其中L为曲线$x=a(\cos t+t\sin t)$，$y=a(\sin t-t\cos t)$ $(a>0, 0\leqslant t\leqslant 2\pi)$；

(7)$\int_\Gamma zds$，其中Γ为曲线$x=t\cos t$，$y=t\sin t$，

$z=t\ (0\leqslant t\leqslant t_0)$.

3. 试求半径为 a，中心角为2φ的均匀圆弧的重心。

第二节　对坐标的曲线积分

一、对坐标的曲线积分的概念

设一质点在力

$$\boldsymbol{F}(x, y)=P(x, y)\boldsymbol{i}+Q(x, y)\boldsymbol{j}$$

的作用下，从 xy 面内的点A沿光滑曲线L移动到B，求变力$\boldsymbol{F}(x, y)$所作的功W（图10—4）。

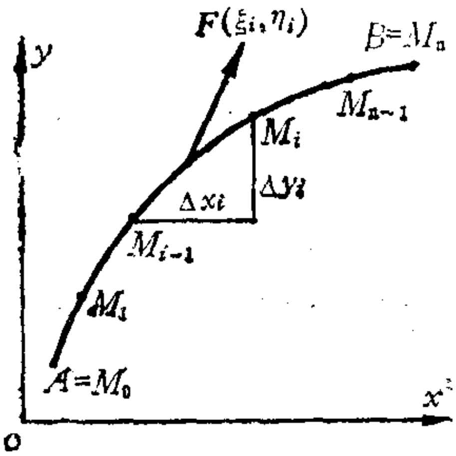


图　10—4

在曲线L上依次任取一组点

$A=M_0$, M_1, M_2, …, M_{n-1}, $M_n=B$,

将L分成n个小弧段

$\widehat{M_0M_1}$, $\widehat{M_1M_2}$, …, $\widehat{M_{n-1}M_n}$,

并设第 i个小弧段$\widehat{M_{i-1}M_i}$的弦向量$\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$（ $i=1, 2, \cdots, n$ ）在x轴与y轴上的分向量分别是

$$\Delta x_i\boldsymbol{i}=(x_i-x_{i-1})\boldsymbol{i},\quad \Delta y_i\boldsymbol{j}=(y_i-y_{i-1})\boldsymbol{j},$$

则
$$\overrightarrow{M_{i-1}M_i}=\Delta x_i\boldsymbol{i}+\Delta y_i\boldsymbol{j}.$$

当各小弧段很短时，质点在各小弧段上所受的力可近似地看成是均匀的，于是，在第 i 个小弧段$\widehat{M_{i-1}M_i}$上任取一点（ξ_i, η_i），质点在该处所受力为

$$\boldsymbol{F}(\xi_i, \eta_i)=P(\xi_i, \eta_i)\boldsymbol{i}+Q(\xi_i, \eta_i)\boldsymbol{j},$$

则变力$\boldsymbol{F}(x, y)$沿有向小弧段$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$所作的功的近似值为

$$\boldsymbol{F}(\xi_i, \eta_i)\cdot\overrightarrow{M_{i-1}M_i}=P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i,$$

从而变力$\boldsymbol{F}(x, y)$沿有向弧段L所作的功的近似值为

$$W\approx\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i],$$

用λ表示n个小弧段的最大长度，取上式右端当$\lambda\to 0$时的极限，就得

$$W=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i]$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i+\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i.$$

抽去它的物理意义就得到对坐标的曲线积分的定义.

定义 设函数$P(x, y)$在xy面内的有向光滑曲线L（从点A到点B）上连续. 用L上的点$A=M_0, M_1, \cdots, M_n=B$将$L$按确定的方向顺次分成$n$个有向小弧段

$$\overset{\frown}{M_0M_1}, \overset{\frown}{M_1M_2}, \cdots, \overset{\frown}{M_{n-1}M_n}.$$

设λ是n个小弧段的最大长度，第i个小弧段$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$（$i=1, 2, \cdots, n$）的弦向量$\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$在$x$轴与$y$轴上的分向量分别为

$$\Delta x_i\boldsymbol{i}=(x_i-x_{i-1})\boldsymbol{i},\ \Delta y_i\boldsymbol{j}=(y_i-y_{i-1})\boldsymbol{j}.$$

在第i个小弧段$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$上任取一点$(\xi_i, \eta_i)$，如果极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i$$

存在，这个极限就叫做函数$P(x, y)$在有向曲线L上对坐标x的曲线积分，记作$\int_L P(x, y)dx$，即

$$\int_L P(x, y)\,dx = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i, \tag{1}$$

其中L叫做**积分路线**(或积分路径)，$P(x, y)$叫做**被积函数**.

类似地，可定义函数$Q(x, y)$在L上对坐标y的曲线积分

$$\int_L Q(x, y)dy = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i. \tag{2}$$

经常出现的是(1)与(2)合并起来的形式

$$\int_L P(x, y)\,dx + \int_L Q(x, y)\,dy,$$

简记为

$$\int_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)dy. \tag{3}$$

(3)式称为组合曲线积分. 于是，上述力$\boldsymbol{F}$所作的功W可表示为

$$W = \int_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

如果L是封闭曲线，函数$P(x, y)$沿封闭曲线L对坐标x的曲线积分及$Q(x, y)$沿封闭曲线L对坐标y的曲线积分分别记为

$$\oint_L P(x,y)dx 及 \oint_L Q(x, y)dy,$$

它们的组合曲线积分为

$$\oint_L Pdx + Qdy,$$

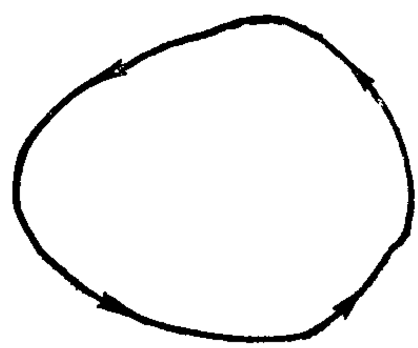


图 10—5

其中L的方向必须预先规定好。如图10—5，我们规定当人沿封闭曲线前进时，如该曲线所围的区域总在前进方向的左边，则前进的方向规定为封闭曲线的正向，反之为L的负向。

应当指出，如果函数$P(x,y)$在有向光滑曲线L上连续，那么无论L如何分法，点(ξ_i,η_i)如何取法，（1）式右端的极限必存在。

上述定义，可推广到空间有向光滑曲线Γ的情形：

$$\int_\Gamma P(x,y,z)dx=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i,$$

$$\int_\Gamma Q(x,y,z)dy=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i,$$

$$\int_\Gamma R(x,y,z)dz=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i,$$

它们的组合曲线积分为

$$\int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz.$$

二、对坐标的曲线积分的性质

性质1° 设L可分成两段光滑曲线L_1、L_2，记$L=L_1+L_2$，则

$$\int_{L_1+L_2}Pdx+Qdy=\int_{L_1}Pdx+Qdy+\int_{L_2}Pdx+Qdy.$$

性质2° 对坐标的曲线积分与积分路线的方向有关。

设$-L$是与L方向相反的有向曲线，则

$$\int_{-L}Pdx+Qdy=-\int_L Pdx+Qdy.$$

事实上，根据定义，$\Delta x_i \boldsymbol{i}$与$\Delta y_i \boldsymbol{j}$分别是第$i$个小弧段$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$的弦向量$\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$在$x$轴上与$y$轴上的分向量，当改变曲线$L$的方向时，$\Delta x_i$与$\Delta y_i$要变符号，所以上式成立。

三、对坐标的曲线积分的计算法

1．设有向光滑曲线L（从点A到点B）的方程为

$$x=\varphi(t), \qquad y=\psi(t),$$

起点A和终点B分别对应于$t=\alpha$和$t=\beta$，且$\varphi'(t)$与$\psi'(t)$在以α与β为端点的闭区间上连续，函数$P(x,y)$与$Q(x,y)$在L上连续，则

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt. \qquad (4)$$

证明从略。

公式（4）表明，计算对坐标的曲线积分，只要把式中的x、y、dx、dy依次换为$\varphi(t)$、$\psi(t)$、$\varphi'(t)dt$、$\psi'(t)dt$，然后从α（起点的对应值）到β（终点的对应值）作定积分即可。

2．设有向光滑曲线L（从点A到点B）的方程为

$$y=y(x),$$

起点A和终点B分别对应于$x=a$和$x=b$，且$y'(x)$在以a、b为端点的闭区间上连续，函数$P(x,y)$与$Q(x,y)$在L上连续，则

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_a^b \{P[x,y(x)]+Q[x,y(x)]y'(x)\}dx. \qquad (5)$$

类似于(4)，如果空间有向光滑曲线Γ的方程为$x=\varphi(t)$,

$y=\psi(t)$，$z=\omega(t)$，起点和终点分别对应于$t=\alpha$和$t=\beta$，且$\varphi'(t)$，$\psi'(t)$，$\omega'(t)$在以α、β为端点的闭区间上连续，函数$P(x, y, z)$，$Q(x, y, z)$，$R(x, y, z)$在Γ上连续，则

$$\int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)+R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}dt. \quad (6)$$

例1 计算$\int_L(x+y)dx$，其中L为（图10—6）：

（1）从点$O(0,0)$到点$A(2,2)$的直线段；

（2）从点$A(2,2)$到点$O(0,0)$的直线段。

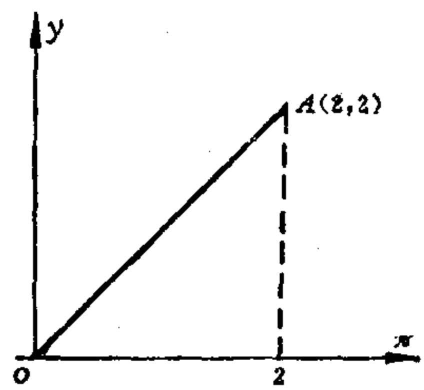


图 10—6

解 （1）$\int_L(x+y)dx$

$$=\int_0^2(x+x)dx=4;$$

（2）$\int_L(x+y)dx=\int_2^0(x+x)dx=-4$。

例2 计算$\int_L 2xydx+x^2dy$，其中L为（图10—7）：

（1）抛物线$y=x^2$从$O(0,0)$到$B(1,1)$的一段；

（2）有向折线OAB，这里O、A、B依次为$(0,0)$、$(1,0)$、$(1,1)$。

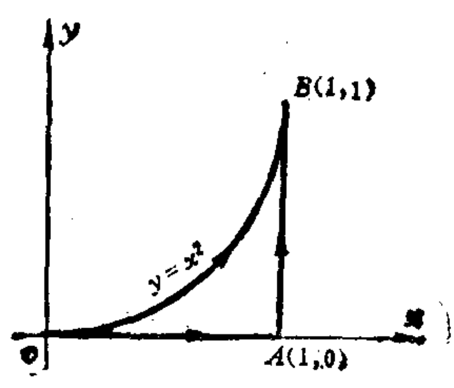


图 10—7

解 (1) $\int_L 2xydx+x^2dy$

$$=\int_0^1(2x\cdot x^2+x^2\cdot 2x)dx=4\int_0^1 x^3dx=1;$$

(2) $\int_L 2xydx+x^2dy$

$$=\int_{OA}2xydx+x^2dy+\int_{AB}2xydx+x^2dy,$$

在OA上，$y=0$，x 从0变到1，于是

$$\int_{OA}2xydx+x^2dy=\int_0^1 2x\cdot 0\cdot dx=0,$$

在AB上，$x=1$，y从0变到1，于是

$$\int_{AB}2xydx+x^2dy=\int_0^1 1^2dy=1,$$

从而 $\int_L 2xydx+x^2dy=0+1=1$.

例3 计算$\oint_L(x+y)dx+(x-y)dy$，其中L是由线段OA，圆弧$\widehat{AB}$（以1为半径），线段BO所围成的闭路（如图10—8所示）.

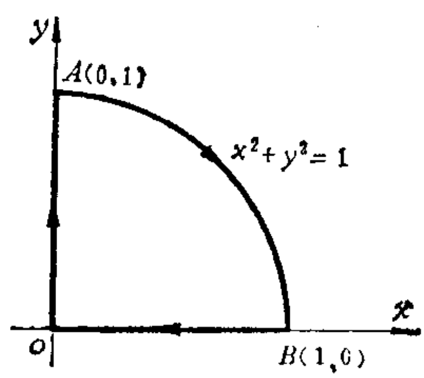


图 10—8

解 $\oint_L(x+y)dx+(x-y)dy$

$$=\int_{OA}(x+y)dx+(x-y)dy$$

$$+\int_{\widehat{AB}}(x+y)dx+(x-y)dy+\int_{BO}(x+y)dx+(x-y)dy;$$

在OA上，$x=0$，y从0变到1，于是

$$\int_{OA}(x+y)dx+(x-y)dy=\int_0^1(0-y)dy=-\frac{1}{2},$$

在$\overset{\frown}{AB}$上，$x=\cos t$，$y=\sin t$，t由$\frac{\pi}{2}$变到0，于是

$$\int_{\overset{\frown}{AB}}(x+y)dx+(x-y)dy$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}[(\cos t+\sin t)(-\sin t)+(\cos t-\sin t)\cos t]dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(\cos 2t-\sin 2t)dt=1,$$

在BO上：$y=0$，x从1变到0，于是

$$\int_{BO}(x+y)dx+(x-y)dy=\int_{1}^{0}(x+0)dx=-\frac{1}{2},$$

从而$\oint_L(x+y)dx+(x-y)dy=-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}=0$。

例4 计算$\int_\Gamma x^3dx+3zy^2dy-x^2ydz$，其中$\Gamma$是从点$A$(3, 2, 1)到$B(0, 0, 0)$的直线段$AB$。

解 AB的方程是$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$，化为参数方程$x=3t$，$y=2t$，$z=t$，$t$从1变到0，从而

$$\int_\Gamma x^3dx+3zy^2dy-x^2ydz$$

$$=\int_1^0[(3t)^3\cdot 3+3t(2t)^2\cdot 2-(3t)^2\cdot 2t]dt$$

$$=87\int_1^0 t^3dt=-\frac{87}{4}.$$

例5 设有一质量为m的质点受重力作用在铅垂面上沿曲线L由点A移动到点B，求重力F所作的功W（图10—9）。

解 设点A与点B的坐标依次为(x_0, y_0)与(X, Y)。

则重力在两坐标轴上的投影分别为 $P(x, y)=0$，$Q(x, y)=mg$，这里 g 是重力加速度.

于是，重力所作的功为

$$W=\int_L Pdx+Qdy$$

$$=\int_{y_0}^{Y} mgdy=mg(Y-y_0).$$

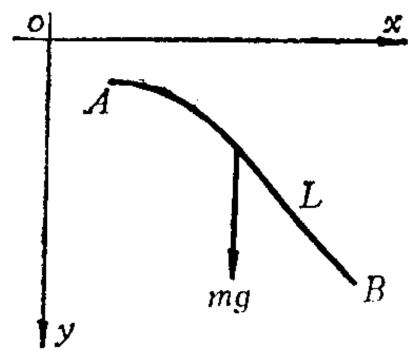


图 10—9

此结果表明，这里重力作功与路径无关，仅取决于下降的距离.

习 题 10—2

1. 计算下列对坐标的曲线积分：

(1) $\int_L (x^2-y^2)dx$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点 $O(0, 0)$ 到点 $A(2, 4)$ 的一段弧；

(2) $\int_L 2xydx+x^2dy$，其中 L 分别是：①直线 $y=x$；②抛物线 $y=x^2$；③立方抛物线 $y=x^3$. 都是由点 $O(0, 0)$ 到点 $A(1, 1)$ 的一段弧；

(3) $\int_L xydx$，其中 L 是抛物线 $y^2=x$ 上从点 $A(1, -1)$ 到点 $B(1, 1)$ 的一段弧；

(4) $\oint_L ydx$，其中 L 为直线 $x=0$，$y=0$，$x=2$，$y=4$ 构成的

正向矩形闭路；

(5) $\oint_L (x^2+y^2)dy$，其中L为直线$x=1, y=1, x=3$，$y=5$构成的正向矩形闭路；

(6) $\oint_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$，其中$L$是以点$M_1(0, -1)$，$M_2(2, -1)$，$M_3(2, 2)$，$M_4(0, 2)$为顶点的矩形正向闭路；

(7) $\int_L ydx+xdy$，其中L为圆周$x=R\cos t$，$y=R\sin t$，由$t=0$到$t=\frac{\pi}{2}$的一段；

(8) $\oint_L \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$，其中$L$为依逆时针方向绕圆周$x^2+y^2=a^2$一圈的路径；

(9) $\int_\Gamma ydx+zdy+xdz$，其中Γ为曲线$x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=bt$上从$t=0$到$t=2\pi$的一段弧；

(10) $\int_\Gamma (y^2-z^2)dx+2yzdy-x^2dz$，其中$\Gamma$为曲线$x=t$，$y=t^2$，$z=t^3$上由$t=0$到$t=1$的一段弧；

2．质量为m的质点在力$\mathbf{F}=-x^2\mathbf{j}$的作用下，沿抛物线$y^2=1-x$从点$A(1, 0)$移动到点$B(0, 1)$．求力$\mathbf{F}$所作的功．

3．设z轴与重力的方向一致，求质量为m的质点从位置(x_1, y_1, z_1)沿直线移动到(x_2, y_2, z_2)时重力所作的功。

第三节 格林公式

一、格林公式

下面，通过格林公式，建立平面区域上的二重积分与沿该区域的边界曲线的曲线积分之间的联系。

定理 1（格林公式） 如果函数$P(x, y)$，$Q(x, y)$及$\frac{\partial P}{\partial y}$，$\frac{\partial Q}{\partial x}$在以光滑或逐段光滑的闭曲线$L$为边界的闭区域$D$上连续，则

$$\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint\limits_L Pdx+Qdy,$$

其中L取正方向。此式叫做**格林公式**。

证 根据区域D的形状不同，分三步证明。

（1）如果平行y轴（或x轴）的直线穿过D的内部与D的边界至多交于两点，并设区域D的上下边界是区间$[a, b]$上的曲线（如图10—10）：

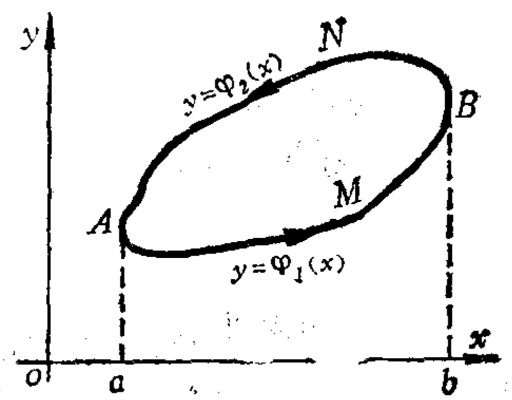


图 10—10

$$y=\varphi_2(x)与y=\varphi_1(x)。$$

一方面

$$\iint\limits_D\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\frac{\partial P}{\partial y}dy$$

$$=\int_a^b P(x,y)\Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dx$$

$$=\int_a^b \{P[x,\ \varphi_2(x)]-P[x,\ \varphi_1(x)]\}\,dx,$$

另一方面

$$\oint_L P\,dx=\int_{\widehat{AMB}}P\,dx+\int_{\widehat{BNA}}P\,dx$$

$$=\int_a^b P[x,\ \varphi_1(x)]dx+\int_b^a P[x,\ \varphi_2(x)]dx$$

$$=\int_a^b\{P[x,\ \varphi_1(x)]-P[x,\ \varphi_2(x)]\}dx,$$

因此

$$-\iint_D\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\oint_L P\,dx.$$

类似地可证

$$\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy=\oint_L Q\,dy.$$

于是得格林公式

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L Pdx+Qdy.$$

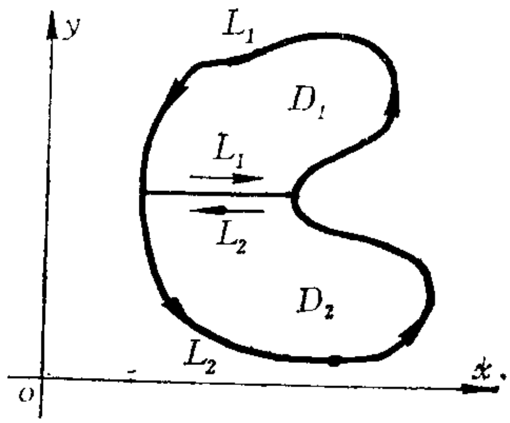


图 10—11

（2）如果平行y 轴（或x 轴）的直线与D的边界L的交点多于两个（图10—11），则可引辅助线，将D分成两个 小区域D_1、D_2，使每个小区域都满足（1）的要求，格林公式在D_1、D_2上都成立，得两个等式

$$\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_{L_1}Pdx+Qdy,$$

$$\iint\limits_{D_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint\limits_{L_2}Pdx+Qdy.$$

把这两个等式相加，注意到相加时，沿辅助线的曲线积分互相抵消，故也得格林公式

$$\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint\limits_{L}Pdx+Qdy.$$

（3）如果区域D由相互不相交的闭曲线L_1和L_2所围成（图10—12），则可引辅助线MN，使曲线NM,L_1,MN,L_2构成正向回路L'，有格林公式

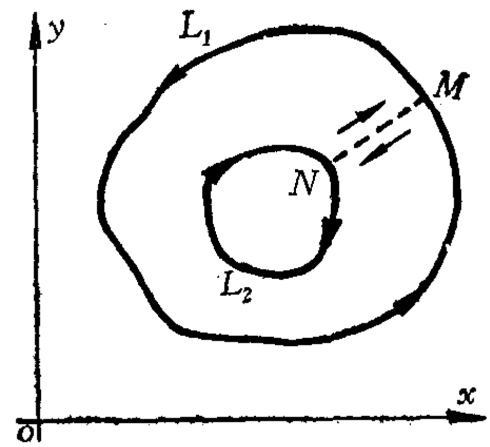


图 10—12

$$\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\oint\limits_{L'}Pdx+Qdy.$$

$$=\int\limits_{NM+MN}Pdx+Qdy+\int\limits_{L_1+L_2}Pdx+Qdy,$$

因为 $\int\limits_{NM+MN}Pdx+Qdy=0$，

所以 $\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int\limits_{L_1+L_2}Pdx+Qdy.$

例 1 计算$\oint\limits_{L}x^2ydx+ydy$，其中$L$是抛物线$y^2=x$及直

线$y=x$所围成的正向闭曲线(图10—13)。

解 由格林公式，$P=x^2y$，$Q=y$，$\frac{\partial P}{\partial y}=x^2$，$\frac{\partial Q}{\partial x}=0$，故有

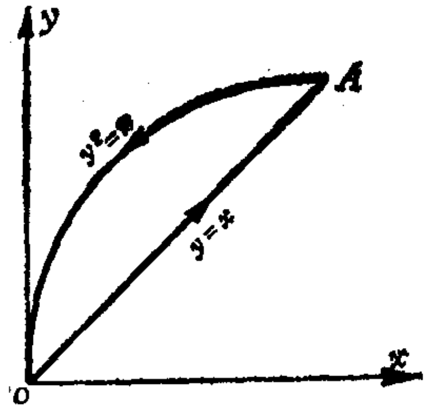


图 10—13

$$\oint_L x^2y\,dx+y\,dy$$

$$=\iint_D(-x^2)\,dx\,dy$$

$$=-\int_0^1 x^2dx\int_x^{\sqrt{x}}dy=-\int_0^1 x^2(\sqrt{x}-x)\,dx=-\frac{1}{28}.$$

例2 计算$I=\oint_L xy^2dy-x^2ydx$，其中L是圆周$x^2+y^2=a^2$构成的正向回路。

解 由格林公式，$P=-x^2y$，$Q=xy^2$，$\frac{\partial P}{\partial y}=-x^2$，$\frac{\partial Q}{\partial x}=y^2$，故有

$$I=\oint_L xy^2dy-x^2ydx=\iint_D(y^2+x^2)\,dx\,dy.$$

其中D是圆域$0\leqslant r\leqslant a$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，于是

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^3dr=\frac{1}{2}\pi a^4.$$

二、曲线积分与路径无关的条件

从第二节的例2看到，自坐标原点$O(0,0)$到终点$B(1,1)$，不论曲线L是抛物线$y=x^2$还是有向折线OAB，

虽然路径不同，但曲线积分相等，都有

$$\int_L 2xydx + x^2dy = 1 ,$$

即曲线积分有时可与路径无关。

曲线积分$\int_L Pdx + Qdy$应满足什么条件时，它才与路径无关呢？

定理 2 如果函数$P(x, y)$，$Q(x,y)$及$\frac{\partial P}{\partial y}$，$\frac{\partial Q}{\partial x}$在单连通区域*$D$上连续，则以下四个论断是等价的：

（1）对位于D内的任意闭曲线L，有

$$\oint_L Pdx + Qdy = 0;$$

（2）对D内任意两点A与B，曲线积分$\int_{AB} Pdx + Qdy$与路径无关；

（3）在D内存在某二元函数$u(x, y)$，使

$$du = Pdx + Qdy;$$

（4）对D内任意一点(x, y)有

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

要证此定理，只须证：（1）⇒（2）、（2）⇒（3）、（3）⇒（4）、（4）⇒（1）成立。本书只证（1）⇒（2）成立，其他从略。

证 （1）⇒（2）。如图10—14，在区域D内从始点A到终

---

*设D为平面上某有界区域，如果在D内的任何闭曲线L所包围的点全属于D，便称D为单连通区域，否则叫多连通区域或复连通区域。

点B任取两条有向曲线L_1与L_2，于是$L_1+(-L_2)$是D内的封闭曲线，由条件(1)有

$$\oint_{L_1+(-L_2)} Pdx+Qdy=0,$$

即

$$\int_{L_1} Pdx+Qdy+\int_{-L_2} Pdx+Qdy=0,$$

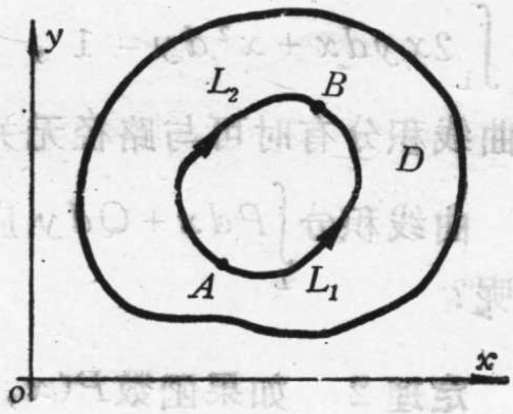


图 10—14

从而 $$\int_{L_1} Pdx+Qdy=-\int_{-L_2} Pdx+Qdy=\int_{L_2} Pdx+Qdy,$$

即曲线积分与路径无关。

根据这一定理，我们常用条件：在单连通域D内

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

来判别D内的曲线积分与路径无关.当曲线积分与路径无关时，从$A(x_0,y_0)$到$B(x_1,y_1)$的曲线积分通常记为

$$\int_A^B Pdx+Qdy \text{ 或 } \int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} Pdx+Qdy.$$

例 3 试证：在整个xy面内，xy^2dx+x^2ydy是某个函数的全微分。

证 由$P=xy^2$，$Q=x^2y$，且$\dfrac{\partial P}{\partial y}=2xy=\dfrac{\partial Q}{\partial y}$在整个$xy$面内恒成立，由定理2可知在整个$xy$面内$xy^2dx+x^2ydy$是某个函数的全微分。

例 4 计算$\int_{L(OA)}(1+xe^{2y})dx+(x^2e^{2y}-y)dy$，其中$L$是$(x-2)^2+y^2=4$的上半圆周，方向如图10—15所示。

解 由$P=1+xe^{2y}$，$Q=x^2e^{2y}-y$，且

$\frac{\partial P}{\partial y}=2xe^{2y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，根据定理2，曲线积分与路径无关，

取直线段OA为积分路径，即

$y=0$，$0\leqslant x\leqslant 4$。

于是$dy=0$，有

$$\int_L(1+xe^{2y})dx+(x^2e^{2y}-y)dy$$

$$=\int_0^4(1+x)dx$$

$$=\left[x+\frac{1}{2}x^2\right]_0^4=12。$$

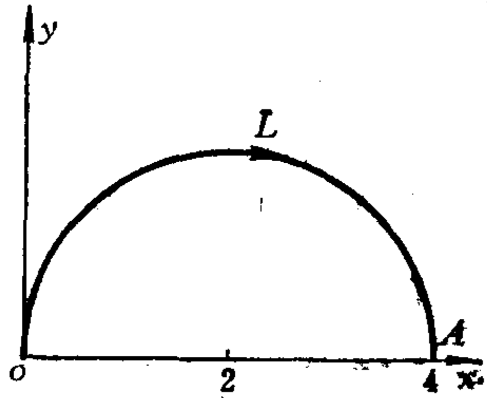


图 10—15

习 题 10—3

1．利用格林公式计算下列曲线积分：

(1) $\oint_L xy^2dy-x^2ydx$，其中L为圆周$x^2+y^2=a^2$的正向；

(2) $\oint_L (x+y)dx-(x-y)dy$，其中L为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的正向；

(3) $\oint_L (2x-y+4)dx+(3x+5y-6)dy$，其中$L$为以(0，0)、(3，0)和(3，2)为顶点的三角形边界的正向．

2．证明下列曲线积分在整个xy面内与路径无关，并计算积分值：

(1) $\int_{(1,1)}^{(2,3)}(x+y)dx+(x-y)dy$；

(2) $\int_{(1,-1)}^{(1,1)}(x-y)(dx-dy)$；

(3) $\int_{(-2,-1)}^{(3,0)}(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$.

3.验证下列$P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy$在整个xy面内是某一函数$u(x,\ y)$的全微分:

(1) $(x+2y)dx+(2x+y)dy$;

(2) $2xydx+x^2dy$;

(3) $4\sin x\sin 3y\cos xdx-3\cos 3y\cos 2xdy$.

4.设有一变力在坐标轴上的投影为$X=x^2+y^2$, $Y=2xy-8$, 这变力确定了一个力场.证明质点在此场内移动时, 场力所作的功与路径无关.

*第四节　曲面积分

一、对面积的曲面积分

1. 对面积的曲面积分的概念与性质

在空间有一质量分布不均匀的物质曲面Σ(图10—16), 设曲面Σ上任意点$(x,\ y,\ z)$的面密度是$\mu(x,\ y,\ z)$, 求这块曲面Σ的质量m.

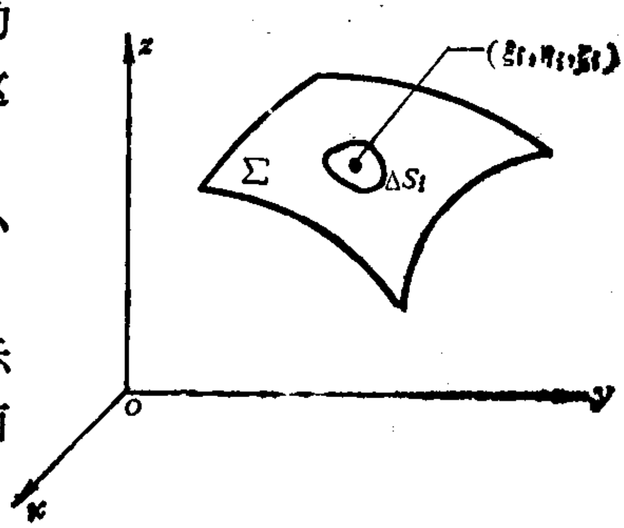


图　10—16

将曲面Σ任意分成n个小曲面块$\Delta S_i(i=1,2,\cdots,n)$, 设$\Delta S_i$也表示其面积, λ表示这n个小曲面块的直径(小曲面上任意两点间距离的最大者)

的最大值，当各小曲面块很小时，各小曲面块的质量可近似地看成是均匀分布的，于是，在ΔS_i上任取一点(ξ_i, η_i, ζ_i)，这个小曲面块ΔS_i的质量的近似值为

$$\mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i,$$

从而曲面Σ的质量的近似值为

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i,$$

取上式右端当$\lambda \to 0$时的极限，就得到

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i.$$

抽去它的物理意义就得到对面积的曲面积分的定义。

定义 1 设函数$f(x, y, z)$在光滑曲面*Σ上连续，将Σ分成n个小曲面$\Delta S_i (i=1, 2, \cdots, n)$，设$\Delta S_i$也表示第$i$个小曲面的面积，$\lambda$表示$n$个小曲面的直径的最大值，在$\Delta S_i$上任意取定一点$(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$，如果极限

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$$

存在，则称此极限值为函数$f(x, y, z)$在曲面Σ上对面积的曲面积分，记为$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)dS$，即

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)dS = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i, \qquad (1)$$

---

*如果曲面上各点处都具有切平面，且当点在曲面上连续移动时，切平面也连续转动，则称此曲面是光滑的。

其中Σ叫做**积分曲面**，$f(x, y, z)$叫做**被积函数**，dS叫做**曲面面积元素**。

不难看出，前面所述曲面Σ的质量m等于面密度$\mu(x, y, z)$对面积的曲面积分，即

$$m=\iint_{\Sigma}\mu(x, y, z)dS.$$

应当指出，如果函数$f(x, y, z)$在光滑曲面Σ上连续，那么，无论Σ如何分法，点(ξ_i, η_i, ζ_i)如何取法，（1）式右端的极限必存在。

如果Σ为封闭曲面，则对面积的曲面积分记为

$$\oiint_{\Sigma}f(x, y, z)dS.$$

性质 设Σ可分成两片光滑曲面Σ_1、Σ_2，函数$f(x,y,z)$在Σ_1、Σ_2上连续，记$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$，则

$$\iint_{\Sigma_1+\Sigma_2}f(x, y, z)dS$$

$$=\iint_{\Sigma_1}f(x, y, z)dS+\iint_{\Sigma_2}f(x, y, z)dS.$$

2.对面积的曲面积分的计算法

如图10—17，设光滑曲面Σ的方程为$z=z(x, y)$，函数$f(x,y,z)$在Σ上连续，Σ在xy面上的投影区域为D_{xy}，$\frac{\partial z}{\partial x}$、

$\frac{\partial z}{\partial y}$在$D_{xy}$上连续。则

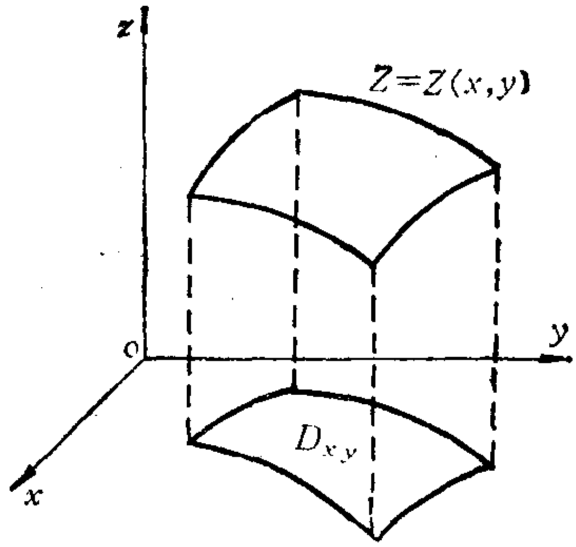


图 10—17

$$\iint_{\Sigma} f(x,\ y,\ z)dS$$

$$=\iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy. \quad (2)$$

证明从略。

公式(2)表明，计算$\iint_{\Sigma} f(x,\ y,\ z)dS$时，只要把$z$、$dS$依次换为$z(x,\ y)$、$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$，再以曲面$\Sigma$在$xy$面上的投影区域$D_{xy}$为积分区域，作二重积分就可以了。

类似地，如果Σ由方程$x=x(y,\ z)$给出，函数$f(x,y,z)$在Σ上连续，Σ在yz面上的投影区域为D_{yz}，$\frac{\partial x}{\partial y}$、$\frac{\partial x}{\partial z}$

在D_{yz}上连续，则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,\ y,\ z)dS$$

$$=\iint\limits_{D_{yz}} f[x(y,z),y,z]\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dydz. \quad (3)$$

如果Σ由方程$y=y(z,\ x)$给出，函数$f(x,y,z)$在Σ上连续，Σ在zx面上的投影区域为D_{zx}，$\frac{\partial y}{\partial x}$、$\frac{\partial y}{\partial z}$在$D_{zx}$上连续，则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,\ y,\ z)dS$$

$$=\iint\limits_{D_{zx}} f[x,y(z,x),z]\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,dzdx. \quad (4)$$

例1 计算$\iint\limits_{\Sigma} xyzdS$，其中$\Sigma$为平面$x+y+z=1$，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$z\geqslant 0$的部分（图10—18）。

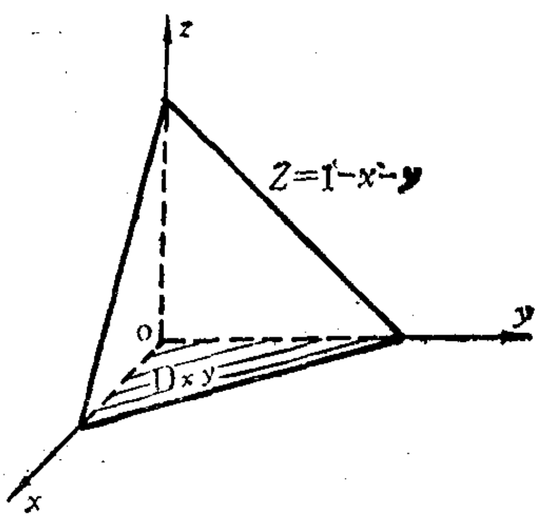


图 10—18

解 在Σ上，$z=1-x-y$，Σ在xy面上的投影区域D_{xy}为$x=0$，$y=0$及$x+y=1$所围成的区域。

因$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$

$=\sqrt{3}$，

故

$$\iint_{\Sigma} xyz\,dS=\sqrt{3}\iint_{D_{xy}} xy(1-x-y)\,dx\,dy$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1 x\,dx\int_0^{1-x} y(1-x-y)\,dy$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1 x\cdot\frac{(1-x)^3}{6}\,dx=\frac{\sqrt{3}}{120}.$$

例2 计算$\oiint_{\Sigma}\frac{dS}{z}$，其中$\Sigma$是球面$x^2+y^2+z^2=a^2$被平面$z=h(0<h<a)$所截的顶部与平面$z=h$所围成的整个边界曲面（图10—19）。

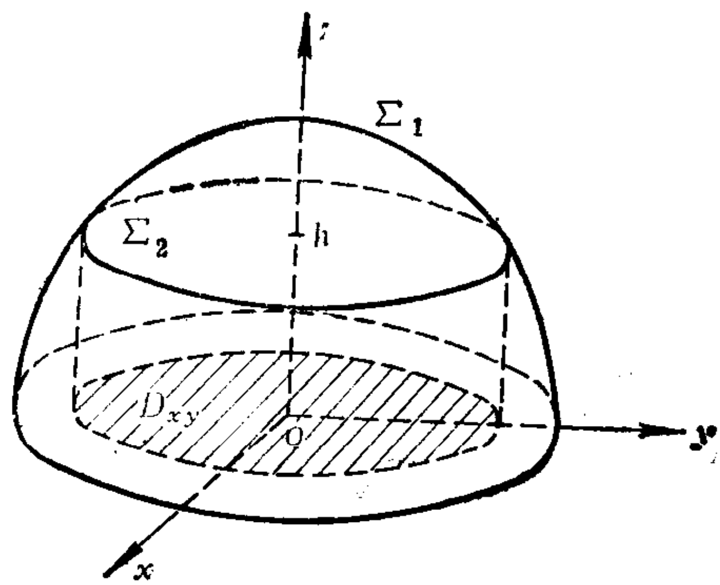


图 10—19

解 整个边界曲面Σ可分为Σ_1与Σ_2两部分，则

$$\oiint_{\Sigma}\frac{dS}{z}=\iint_{\Sigma_1}\frac{dS}{z}+\iint_{\Sigma_2}\frac{dS}{z}.$$

在Σ_1上，$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，

$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$，$\Sigma_1$在$xy$面上的投影区域$D_{xy}$为$x^2+y^2\leqslant a^2-h^2$，于是

$$\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{dS}{z}=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=a\iint\limits_{D_{xy}}\frac{dxdy}{a^2-x^2-y^2}=a\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{rdr}{a^2-r^2}$$

$$=2\pi a\ln\frac{a}{h}.$$

在Σ_2上，$z=h$，$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=1$，$\Sigma_2$在$xy$面上的投影区域$D_{xy}$仍为$x^2+y^2\leqslant a^2-h^2$，于是

$$\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{dS}{z}=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{dxdy}{h}=\frac{\pi}{h}(a^2-h^2),$$

故

$$\oiint\limits_{\Sigma}\frac{dS}{z}=2\pi a\ln\frac{a}{h}+\frac{\pi}{h}(a^2-h^2).$$

二、对坐标的曲面积分

1. 对坐标的曲面积分的概念与性质

先说明有向曲面及其在坐标面上的投影概念，这里假定曲面是光滑的。

我们常见的曲面都是双侧的，在讨论对坐标的曲面积分时，需要指定曲面的侧，我们可以通过曲面上法向量的指向来定出曲面的侧。例如，由方程$z=z(x, y)$所表示的曲面，如果取它的法向量$\boldsymbol{n}$的指向朝上，即$\boldsymbol{n}$与z轴的正向成锐角，我们就认为取定曲面的上侧；如果$\boldsymbol{n}$的指向朝下，即$\boldsymbol{n}$与z轴的正向

成钝角，我们就认为取定曲面的下侧。由方程$y=y(z,\ x)$所表示的曲面，如果取它的法向量$\boldsymbol{n}$的指向朝右，即$\boldsymbol{n}$与y轴的正向成锐角，我们就认为取定曲面的右侧；如果$\boldsymbol{n}$的指向朝左，即$\boldsymbol{n}$与y轴的正向成钝角，我们就认为取定曲面的左侧。由方程$x=x(y,\ z)$所表示的曲面，如果它的法向量$\boldsymbol{n}$的指向朝前，即$\boldsymbol{n}$与x轴的正向成锐角，我们就认为取定曲面的前侧；如果$\boldsymbol{n}$的指向朝后，即$\boldsymbol{n}$与x轴的正向成钝角，我们就认为取定曲面的后侧。又如，对于闭曲面，如果取它的法向量的指向朝外，我们就认为取定曲面的外侧。这样选定了法向量亦即选定了侧的曲面，就称为**有向曲面**。

设Σ是有向曲面，它在各坐标面上的投影也有正负之分。如图10—20，在Σ上取一小块曲面ΔS，ΔS在xy面上的投影记为$(\Delta S)_{xy}$，投影区域为$\Delta\sigma_{xy}$（也表示面积）. 若Σ取上侧，这时，ΔS上任意一点的法向量与z轴的夹角γ的余弦$\cos\gamma$为正，我们规定$(\Delta S)_{xy}=\Delta\sigma_{xy}$。

如果Σ取下侧，亦即ΔS上任意一点的法向量与z轴的夹角γ的余弦$\cos\gamma$为负，我们规定$(\Delta S)_{xy}=-\Delta\sigma_{xy}$。

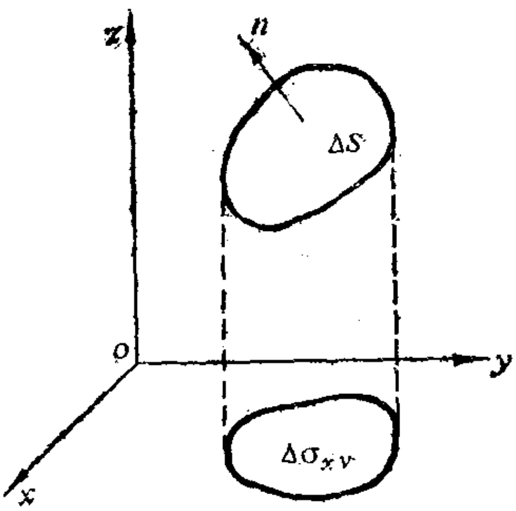


图 10—20

于是

$$(\Delta S)_{xy}=\begin{cases}\Delta\sigma_{xy}, & \text{当}\cos\gamma>0\text{（取上侧）},\\ -\Delta\sigma_{xy}, & \text{当}\cos\gamma<0\text{（取下侧）},\\ 0, & \text{当}\cos\gamma=0\,.\end{cases}$$

类似地，可规定ΔS在yz面及zx面上的投影$(\Delta S)_{yz}$及$(\Delta S)_{zx}$。

下面从计算流量问题，引进对坐标的曲面积分的概念。

设在空间内有一稳定流动的液体(即速度与时间无关)，其密度为1，以流速$\boldsymbol{v}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$流过有向曲面Σ。求在单位时间内流过曲面Σ的流体总质量（简称流量）。

如图10—21，将Σ任意分成n个小曲面$\Delta S_i(i=1,2,\cdots,n)$，设$\Delta S_i$也表示其面积，$\lambda$表示这$n$个小曲面的直径的最大值。当各小曲面很小时，液体流过各小曲面的速度可近似地看成是均匀的，于是在ΔS_i上任取一点$E_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$，在点$E_i$处作曲面的单位法向量

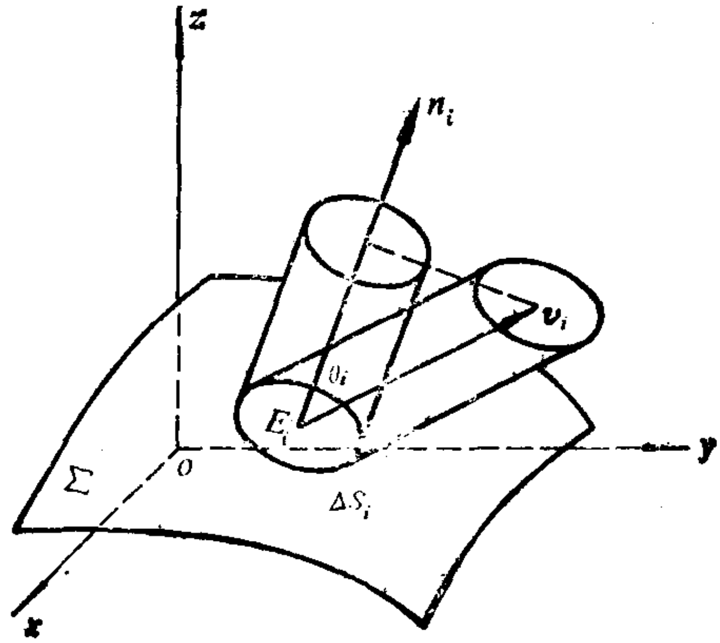


图　10—21

$\boldsymbol{n}_i=\cos\alpha_i\boldsymbol{i}+\cos\beta_i\boldsymbol{j}+\cos\gamma_i\boldsymbol{k}$，以点$E_i$处的流速

$\boldsymbol{v}_i=P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\boldsymbol{i}+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\boldsymbol{j}+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\boldsymbol{k}$

代替ΔS_i上每一点处的流速，并设$\boldsymbol{v}_i$与$\boldsymbol{n}_i$间的夹角为θ_i，从而得到单位时间内通过ΔS_i的流量的近似值为以$|\boldsymbol{v}_i|\cos\theta_i$为高，$\Delta S_i$为底面积的柱体的体积，即

$$|\boldsymbol{v}_i|\cos\theta_i\cdot\Delta S_i=\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{n}_i\Delta S_i\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

于是，流量Φ的近似值为

$$\Phi\approx\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{n}_i\Delta S_i=\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i$$
$$+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i]\Delta S_i,$$

但$\cos\alpha_i \cdot \Delta S_i \approx (\Delta S_i)_{yz}$，$\cos\beta_i \cdot \Delta S_i \approx (\Delta S_i)_{zx}$，$\cos\gamma_i \cdot \Delta S_i \approx (\Delta S_i)_{xy}$。

所以

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}],$$

取上式右端当$\lambda \to 0$时的极限，得到

$$\begin{aligned}\Phi &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} \\ &\quad + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}] \\ &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} \\ &\quad + \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} \\ &\quad + \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}.\end{aligned}$$

抽去它的物理意义就得到对坐标的曲面积分的定义。

定义 2 设函数$R(x, y, z)$在光滑有向曲面Σ上连续。将Σ任意分成n个小曲面ΔS_i（$i=1, 2, \cdots, n$），设ΔS_i也表示此小曲面ΔS_i的面积，λ表示n个小曲面的直径的最大值，$(\Delta S_i)_{xy}$表示ΔS_i在xy面上的投影。在ΔS_i上任意取定一点(ξ_i, η_i, ζ_i)，如果极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

存在，则称此极限值为函数 $R(x, y, z)$ 在有向曲面Σ上对坐标 x、y 的曲面积分，记为$\iint\limits_{\Sigma} R(x, y, z)dxdy$，即

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}. \quad (5)$$

类似地，可定义函数$P(x, y, z)$在有向曲面 Σ 上对坐标 y、z的曲面积分和$Q(x, y, z)$对坐标z、x的曲面积分，即

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}, \quad (6)$$

$$\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}, \quad (7)$$

经常出现的是它们合并起来的形式

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + \iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx + \iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy,$$

简记为

$$\iint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy, \quad (8)$$

（8）式称为对坐标的组合曲面积分。

于是，前面所述流体通过有向曲面Σ 的流量可表示为

$$\Phi = \iint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

如果Σ为封闭的有向曲面，则公式（8）记为

$$\oiint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

应当指出，如果函数 $R(x, y, z)$ 在有向光滑曲面Σ上连续，那么，无论Σ如何分法，点(ξ_i, η_i, ζ_i)如何取法，（5）式右端的极限必存在。

对坐标的曲面积分的性质：

性质1° 设有向曲面Σ可分成两片光滑曲面 Σ_1与 Σ_2，记 $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$，则

$$\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

$$= \iint\limits_{\Sigma_1} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy + \iint\limits_{\Sigma_2} Pdydz + Qdzdx$$

$$+ Rdxdy.$$

性质2° 设Σ是有向曲面，$-\Sigma$表示与 Σ 取侧相反的有向曲面，则

$$\iint\limits_{-\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

$$= -\iint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

即，当积分曲面改变为相反侧时，对坐标的曲面积分要改变符号，这是特别要注意的。

2. 对坐标的曲面积分的计算法

设有向曲面Σ的方程为 $z = z(x, y)$，函数 $R(x, y, z)$

在Σ上连续，Σ在xy面上的投影域为D_{xy}，$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$在$D_{xy}$上连续，则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)dxdy$$

$$= \pm \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)]dxdy, \tag{9}$$

其中右端的符号取法是：取Σ的上侧则取正号，下侧则取负号。

证明从略。

公式(9)表明，计算$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)dxdy$时，只要把$z$换为$z(x, y)$，在$\Sigma$的投影域$D_{xy}$上计算二重积分就可以了。

类似地，设Σ由$x = x(y,z)$给出，$P(x,y,z)$在Σ上连续，Σ在yz面上的投影区域为D_{yz}，$\frac{\partial x}{\partial y}$、$\frac{\partial x}{\partial z}$在$D_{yz}$上连续，则

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z)dydz$$

$$= \pm \iint_{D_{yz}} P[x(y, z), y, z]dydz, \tag{10}$$

其中右端的符号取法是：取Σ的前侧则取正号，后侧则取负号。

设Σ由$y = y(z, x)$给出，$Q(x, y, z)$在Σ上连续，Σ在zx面上的投影域为D_{zx}，$\frac{\partial y}{\partial z}$、$\frac{\partial y}{\partial x}$在$D_{zx}$上连续，则

$$\iint\limits_{\Sigma} Q(x, y, z)dzdx$$

$$= \pm \iint\limits_{D_{zx}} Q[x, y(z, x), z]dzdx, \tag{11}$$

其中右端的符号取法是：取 Σ 的右侧则取正号，左侧则取负号。

注意，使用公式(9)、(10)、(11)时，必须正确决定各式右端的符号。

例 3 计算$\iint\limits_{\Sigma} xyzdxdy$，其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=1$在第一、五卦限部分的外侧。

解 如图10—22，将Σ分为Σ_1和Σ_2，方程分别是

Σ_1: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$,

Σ_2: $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$.

于是

$$\iint\limits_{\Sigma} xyzdxdy$$

$$=\iint\limits_{\Sigma_1} xyzdxdy$$

$$+\iint\limits_{\Sigma_2} xyzdxdy.$$

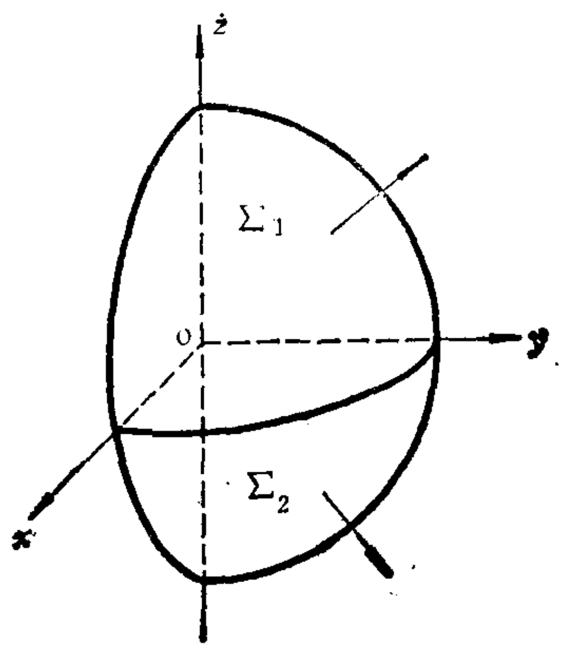


图 10—22

等式右端第一个积分取的是Σ_1的上侧，第二个积分则取Σ_2的下侧，由(9)式有

$$\iint_{\Sigma} xyz\,dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy-\iint_{D_{xy}} xy(-\sqrt{1-x^2-y^2})\,dxdy$$

$$=2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$=2\iint_{D_{xy}} r^2\sin\theta\cos\theta\ \sqrt{1-r^2}\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2\theta\,d\theta\int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\,dr=\frac{2}{15}.$$

例 4 计算$\oiint_{\Sigma} x^2dydz+y^2dzdx$，其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧（图10—23）。

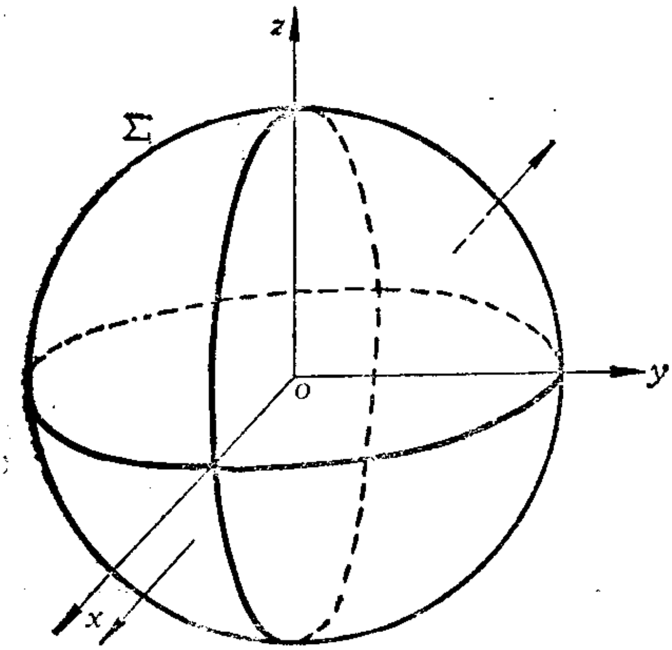


图 10—23

解 先计算$\oint\!\!\oint_{\Sigma} x^2 dydz$.

将Σ分为$\Sigma_{前}$（Σ的前侧）与$\Sigma_{后}$（Σ的后侧）两部分，其方程分别为

$$\Sigma_{前}:\quad x=\sqrt{1-y^2-z^2},$$

$$\Sigma_{后}:\quad x=-\sqrt{1-y^2-z^2},$$

于是

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma} x^2 dydz=\iint_{\Sigma_{前}} x^2 dydz+\iint_{\Sigma_{后}} x^2 dydz,$$

由公式(10)有

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma} x^2 dydz$$

$$=\iint_{D_{yz}}(1-y^2-z^2)dydz-\iint_{D_{yz}}(1-y^2-z^2)dydz=0.$$

再计算$\oint\!\!\oint_{\Sigma} y^2 dzdx$.

将Σ分为$\Sigma_{右}$（Σ的右侧）与$\Sigma_{左}$（Σ的左侧）两部分，方程分别为 $\Sigma_{右}$: $y=\sqrt{1-z^2-x^2}$,

$$\Sigma_{左}:\quad y=-\sqrt{1-z^2-x^2},$$

于是

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma} y^2 dzdx=\iint_{\Sigma_{右}} y^2 dzdx+\iint_{\Sigma_{左}} y^2 dzdx,$$

由公式(11)有

$$\oiint_{\Sigma} y^2 dzdx$$

$$= \iint_{D_{zx}} (1-z^2-x^2)dzdx - \iint_{D_{zx}} (1-z^2-x^2)dzdx = 0,$$

故 $\oiint_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx = 0$。

例 5 计算 $\oiint_{\Sigma} y(x-z)dydz + x^2 dzdx$

$+(y^2+xz)dxdy$，

其中Σ是棱长为 1 的正方体的表面外侧（图10—24）。

解 将Σ分为Σ_1、Σ_2、Σ_3、Σ_4、Σ_5、Σ_6，因Σ_3、Σ_4、Σ_5、Σ_6在xy 面上的投影为零，所以

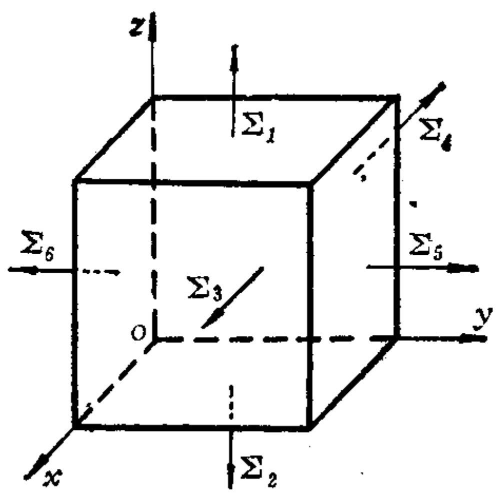


图 10—24

$$\oiint_{\Sigma} (y^2+xz)dxdy$$

$$= \iint_{\Sigma_1} (y^2+xz)dxdy + \iint_{\Sigma_2} (y^2+xz)dxdy,$$

其中Σ_1：$z=1$，Σ_2：$z=0$．且第一个积分取的是Σ_1的上侧，第二个积分则取Σ_2的下侧。

于是

$$\oiint_{\Sigma} (y^2+xz)dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}(y^2+x)dxdy-\iint_{D_{xy}}(y^2+x\cdot 0)dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}xdxdy=\int_0^1 dy\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}.$$

又因Σ_1、Σ_2、Σ_5、Σ_6在yz面上的投影为零，所以

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}y(x-z)dydz=\iint_{\Sigma_3}y(x-z)dydz+\iint_{\Sigma_4}y(x-z)dydz,$$

其中Σ_3：$x=1$，　　Σ_4：$x=0$，

且第一和第二个积分分别取Σ_3的前侧和Σ_4的后侧，于是

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}y(x-z)dydz$$

$$=\iint_{D_{yz}}y(1-z)dydz-\iint_{D_{yz}}y(0-z)dydz$$

$$=\iint_{D_{yz}}ydydz=\int_0^1 dz\int_0^1 ydy=\frac{1}{2}.$$

又因Σ_1、Σ_2、Σ_3、Σ_4在 zx面上投影为零，所以

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}x^2dzdx=\iint_{\Sigma_5}x^2dzdx+\iint_{\Sigma_6}x^2dzdx,$$

其中　Σ_5：$y=1$，　　Σ_6：$y=0$，

且第一和第二个积分分别取Σ_5的右侧和Σ_6的左侧，于是

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}x^2dzdx=\iint_{D_{zx}}x^2dzdx-\iint_{D_{zx}}x^2dzdx=0.$$

故

$$\oiint_{\Sigma} y(x-z)dydz + x^2dzdx + (y^2+xz)dxdy$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1.$$

三、高斯公式

格林公式给出了平面区域上的二重积分与沿该区域的边界曲线的曲线积分之间的联系，下面的高斯公式给出了空间区域上的三重积分与围成该区域的边界曲面上的曲面积分之间的联系.

定理（高斯公式） 设空间闭区域Ω是由分片光滑的闭曲面Σ围成，函数$P(x, y, z)$，$Q(x, y, z)$，$R(x, y, z)$在Ω上具有一阶连续偏导数，则

$$\oiint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

$$= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv, \tag{12}$$

其中曲面积分取闭曲面Σ的外侧.

证明从略.

例 6 计算$\oiint_{\Sigma}(x-y)dxdy + (y-z)xdydz$，其中$\Sigma$为柱面$x^2+y^2=1$及平面$z=0$，$z=3$所围成的空间区域$\Omega$的整个边界曲面的外侧（图10—25）.

解 $P=(y-z)x$，$Q=0$，$R=x-y$.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = y-z, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

由公式(12)将所给曲面积分化为三重积分，并利用柱面坐标计

算这三重积分：

$$\oiint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

$$=\iiint_{\Omega}(y-z)dxdydz$$

$$=\iiint_{\Omega}(r\sin\theta-z)rdrd\theta dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_0^3(r\sin\theta-z)dz$$

$$=-\frac{9}{2}\pi。$$

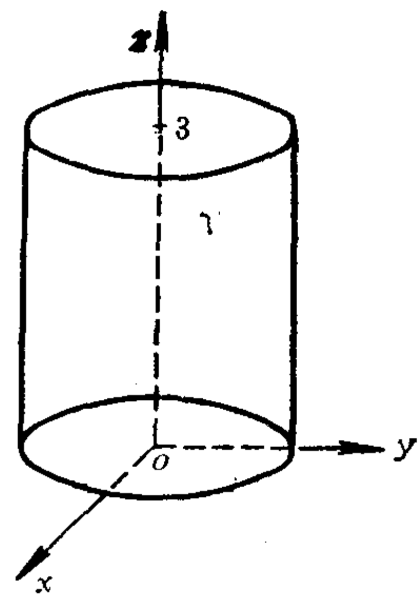


图 10—25

*习 题 10—4

1．计算下列对面积的曲面积分：

（1）$\iint_{\Sigma}(x+y+z)ds$，其中Σ为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$上$z>0$的部分；

（2）$\iint_{\Sigma}\left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)ds$，其中Σ为平面$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$在第一卦限中的部分；

（3）$\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2)ds$，其中Σ为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$及平面$z=1$所围成立体的整个边界曲面；

（4）$\iint_{\Sigma}\frac{ds}{x^2+y^2+z^2}$，其中Σ是界于平面$z=0$及$z=H(H>0)$

之间的圆柱面$x^2+y^2=R^2$.

2.如果球面上每一点的密度等于该点到球的某一直径的距离的平方，试求球面的质量.

3.分别计算(1)$\oiint\limits_{\Sigma} z\,dx\,dy$；(2)$\oiint\limits_{\Sigma} x^2dy\,dz$；(3)$\oiint\limits_{\Sigma} y^4dz\,dx$

其中Σ为球面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧.

4.计算下列对坐标的曲面积分：

(1)$\iint\limits_{\Sigma} x^2y^2z\,dx\,dy$，其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$下半部的外侧；

(2)$\oiint\limits_{\Sigma} x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy$，其中$\Sigma$为三坐标面及平面$x=1$，$y=1$，$z=1$所围成的正方体表面的外侧；

(3)$\oiint\limits_{\Sigma} xz\,dx\,dy+xy\,dy\,dz+yz\,dz\,dx$，其中$\Sigma$为平面$x+y+z=1$，$x=0$，$y=0$，$z=0$所围成立体的表面的外侧；

(4)$\iint\limits_{\Sigma} z\,dx\,dy+x\,dy\,dz+y\,dz\,dx$，其中$\Sigma$为柱面$x^2+y^2=1$被平面$z=0$及$z=3$所截部分的外侧；

5.求流体以速度$\mathbf{v}=xy\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+zx\mathbf{k}$穿过球面$x^2+y^2+z^2=1$在第一卦限部分的流量.

6.利用高斯公式计算下列对坐标的曲面积分：

(1)$\oiint\limits_{\Sigma} 2x\,dy\,dz+3y\,dz\,dx+4z\,dx\,dy$，其中$\Sigma$为上半球面$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$与平面$z=0$所围立体的整个边界曲面的外侧；

(2)$\oiint\limits_{\Sigma} x^2dy\,dz+y^2dz\,dx+z^2dx\,dy$，其中$\Sigma$为平面$x=0$，

$y=0$，$z=0$，$x=a$，$y=a$，$z=a$（$a>0$）所围成立体的表面外侧；

（3）$\oiint\limits_{\Sigma} x^3dydz+y^3dzdx+zdxdy$，$\Sigma$为圆柱面$x^2+y^2=1$，坐标面$z=0$，平面$z=2$所围成立体的表面外侧．

复 习 题 十

1．计算下列对弧长的曲线积分：

（1）$\int_L y^2ds$，其中L为摆线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$的一拱；

（2）$\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$，其中$L$为圆周$x^2+y^2=a^2$，直线$y=x$及$x$轴在第一象限所围图形的边界；

（3）$\oint_L \sqrt{x^2+y^2}ds$，其中L为圆周 $x^2+y^2=ax$；

（4）$\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)ds$，其中$\Gamma$是圆柱螺线 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=bt$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$．

2．计算下列对坐标的曲线积分：

（1）$\int_L y^2dx+x^2dy$，其中L是上半椭圆$x=a\cos t$，$y=b\sin t$取顺时针方向；

（2）$\int_L xydx+(y-x)dy$，其中 L 分别是：①直线$y=x$；

②抛物线$y=x^2$；③立方抛物线$y=x^3$，都是由原点(0，0)到点(1，1)；

(3) $\oint_L xdy-ydx$，其中L为直线$y=0$，$x=1$，$y=2x$构成的正向三角形回路；

(4) $\int_L (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$，其中$L$为曲线$y=1-|1-x|$上对应于$x$从0到2的一段；

(5) $\oint_L (x+y)dx+(x-y)dy$，其中L为依逆时针方向绕椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$一圈的路径；

(6) $\oint_L y^2dx-x^2dy$，其中L是半径为1，中心在(1，1)的圆周，取正向；

(7) $\oint_\Gamma xyzdz$，其中Γ是圆周$x=\cos t$，$y=\frac{\sin t}{\sqrt{2}}$，$z=\frac{\sin t}{\sqrt{2}}$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$，取$t$增加方向；

(8) $\int_\Gamma xdx+ydy+(x+y-1)dz$，其中$\Gamma$是从点(1，1，1)到点(2，3，4)的一段直线。

3．利用格林公式计算下列曲线积分：

(1) $\oint_L \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$，其中$L$为某一不包围原点的封闭光滑曲线，取正向；

(2) $\oint_L (x+y)dx+(x-y)dy$，其中L为直线$x=0$，$y=0$，

圆周 $x^2+y^2=1$ 在第一象限围成的正向回路.

4.利用格林公式计算 $\iint\limits_D e^{-y^2}dxdy$，其中$D$是以$O(0,0)$，$A(1,1)$，$B(0,1)$为顶点的三角形.

5.利用曲线积分与所取路径无关的条件计算

$\int_L(1+xe^{2y})dx+(x^2e^{2y}-y)dy$，其中$L$是$(x-2)^2+y^2=4$的上半圆周，取逆时针方向.

6.验证分段光滑的任意闭路的曲线积分

$$\oint_L \varphi(x)dx+\psi(y)dy=0,$$

其中$\varphi(x)$及$\psi(y)$为连续函数.

7.若悬链线$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$上每一点的密度与该点的纵坐标成反比，且在点$(0,a)$的密度等于$\mu_0$.试求曲线在横坐标$x_1=0$及$x_2=a$间一段的质量$(a>0)$.

8.设线密度为1,求均匀心形线$r=a(1-\cos\theta)$全弧的重心.

9.在椭圆$x=a\cos t$，$y=b\sin t$上每一点M有作用力**F**，其大小等于从点M到椭圆中心的距离，而方向朝着椭圆中心.

(1)试计算质点P沿椭圆位于第一象限中的弧从点$(a,0)$移动到点$(0,b)$时力**F**所作的功;

(2)求点P按正向走遍全部椭圆时力**F**所作的功,

10.* 计算下列对面积的曲面积分:

(1) $\oiint\limits_\Sigma \frac{ds}{(1+x+y)^2}$，其中$\Sigma$为平面$x+y+z=1$及三个坐标面所围成的四面体的表面;

(2) $\iint\limits_\Sigma (xy+yz+zx)ds$，其中$\Sigma$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被曲

面 $x^2+y^2=2ax$所截得的部分.

*11.计算下列对坐标的曲面积分:

(1) $\oiint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dxdy+(y-z)dydz$，其中Σ为三坐标面及平面 $x=1$，$y=1$，$z=1$ 所围成的正立方体的表面外侧;

(2) $\oiint\limits_{\Sigma}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$，其中Σ为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$，$z=2$ 所围立体表面的外侧.

(3) $\oiint\limits_{\Sigma}yzdxdy+zxdydz+xydzdx$，其中Σ是圆柱面 $x^2+y^2=R^2$和平面 $x=0$，$y=0$，$z=0$ 及 $z=h$ ($h>0$) 所围的在第一卦限中的一块立体的表面外侧.

*12.利用高斯公式计算下列曲面积分:

(1) $\oiint\limits_{\Sigma}x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$，其中Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$的外侧;

(2) $\iint\limits_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中Σ为圆锥面 $x^2+y^2=z^2$在 $0\leqslant z\leqslant h$ 的一部分.

*13. 求密度为 μ_0的均匀半球壳$x^2+y^2+z^2=a^2$ ($z\geqslant 0$) 对于 z 轴的转动惯量.

*14.求均匀半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 重心的坐标.

*15.求流体以速度 $\mathbf{v}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$穿过圆锥体 $x^2+y^2\leqslant z^2$ ($0\leqslant z\leqslant h$) 的侧表面的流量.

第十一章 无穷级数

无穷级数是高等数学的重要组成部分，它不仅在数学研究中，而且在物理、力学和工程技术中都有广泛的应用。本章先讨论常数项级数，介绍无穷级数的一些基本概念，然后讨论函数项级数，着重研究如何将函数展开成幂级数与三角级数。

第一节 无穷级数的敛散性

一、无穷级数及其敛散性

无穷级数的概念是与数列的概念密切相关的。设给定一个数列

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \cdots,\ u_n,\ \cdots,$$

则式子

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

称为(常数项)**无穷级数**，简称（常数项）**级数**，记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，

即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots, \tag{1}$$

其中第 n 项u_n叫做级数的**通项**(或一般项)。

级数(1)的前 n 项之和

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \tag{2}$$

称为级数(1)的**部分和**，当 n 依次取 1，2，3，…时，它们构成了一个新的数列：

$$s_1 = u_1,\quad s_2 = u_1 + u_2,\quad s_3 = u_1 + u_2 + u_3,\quad \cdots,$$
$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,\quad \cdots$$

这个数列叫做级数(1)的**部分和数列**，现在我们把级数(1)的"和"的问题与它的部分和数列 s_n 的收敛问题相联系。

定义 当 n 无限增大时，如果部分和数列 s_n 有极限 s：

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

则称无穷级数(1)**收敛**，这时极限 s 叫做级数(1)的**和**，并写成

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s;$$

如果 s_n 没有极限，则称无穷级数(1)**发散**。

当级数(1)收敛时，其部分和 s_n 是级数和 s 的近似值，它们之间的差

$$r_n = s - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \cdots$$

叫做级数(1)的**余项**。此时用近似值 s_n 代替和值 s 所产生的误差是这个余项的绝对值 $|r_n|$.

例 1 证明等比级数(几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots \quad (a \neq 0) \tag{3}$$

当 $|q| < 1$ 时收敛，当 $|q| \geqslant 1$ 时发散。

证 如果公比 $q \neq 1$，则部分和

$$s_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}\cdot q^n.$$

当$|q|<1$时，由于$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\dfrac{a}{1-q}$，这时级数(3)收敛，且其和为$\dfrac{a}{1-q}$。当$|q|>1$时，由于$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=\infty$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\infty$，这时级数(3)发散。

如果$|q|=1$，则当$q=1$时，$s_n=na$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\infty$，因此级数(3)发散；当$q=-1$时，级数(3)成为

$$a-a+a-a+\cdots, \tag{4}$$

它的部分和为$s_{2n}=0$，$s_{2n-1}=a$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)，从而$\lim\limits_{n\to\infty}s_n$不存在，这时级数(3)也发散。

综上所述：当$|q|<1$时，级数(3)收敛于和$\dfrac{a}{1-q}$；当$|q|\geqslant 1$时，级数(3)发散。

例2 判别无穷级数

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

的敛散性。

解 由于

$$u_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

因此

$$\begin{aligned}s_n&=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1},\end{aligned}$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$，即该级数收敛于1。

二、无穷级数的基本性质

无穷级数有如下的基本性质。

性质1° 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，k 是常数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k u_n$ 也收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} k u_n = k \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

推论 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散且常数 $k \neq 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k u_n$ 也发散。

由性质1°及其推论可知：将级数的每一项同乘一个不为零的常数，并不改变这个级数的敛散性。

性质2° 若两个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

性质2°表明：两个收敛级数可以逐项相加与逐项相减。

性质1°、2°可由计算部分和的极限直接推出。

性质3° 在级数前面去掉或加上有限项不会改变该级数的敛散性。

证 设将级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_k+u_{k+1}+\cdots+u_{k+n}+\cdots$$

的前 k 项去掉，得级数

$$u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots+u_{k+n}+\cdots.$$

新级数的部分和为

$$\sigma_n=u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots+u_{k+n}=s_{k+n}-s_k,$$

其中s_{k+n}是原来级数的前 $k+n$ 项之和. 因为s_k是常数，所以当 $n\to\infty$时，σ_n与s_{k+n}同时发散，或者同时收敛. 也就是说，新级数与原来级数具有相同的敛散性.

类似地，可以证明：在级数的前面加上有限项，不会影响级数的敛散性.

应当指出，在收敛级数的前面去掉或加上有限项后所得的级数虽然仍是收敛的，但一般来说新级数的和是与原级数不同的.

性质4° 收敛级数加括号后所成的级数仍收敛于原来的和.

这就是说：收敛级数可以任意加括号. 但收敛级数不能任意去括号. 例如，级数

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$$

收敛于零，但去掉括号后的级数

$$1-1+1-1+\cdots$$

却是发散的，这是无穷多项之和与有限项之和的不同点.

由性质4°用反证法可推出：如果加括号后的级数发散，则原来未加括号的级数也发散.

三、级数收敛的必要条件

定理（级数收敛的必要条件） 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

证 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = s$，它的部分和是$s_n$，则

$$u_n = s_n - s_{n-1}.$$

按定理的条件，有$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1} = s$，所以

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1}$$
$$= s - s = 0.$$

由此可知：如果级数的通项不趋于零，则级数必发散．例如，当$a \neq 0$时，级数(4)的通项为$u_n = (-1)^{n-1}a$，由于$\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$，因此，当$a \neq 0$时，级数(4)发散．

注意：通项趋于零并非级数收敛的充分条件，即存在通项趋于零的发散级数．

例 3 证明调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

是发散的．

证 从图11—1 看出：台阶形的面积比同底的曲边梯形的面积大，所以由定积分的几何意义可知

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx = \ln(n+1).$$

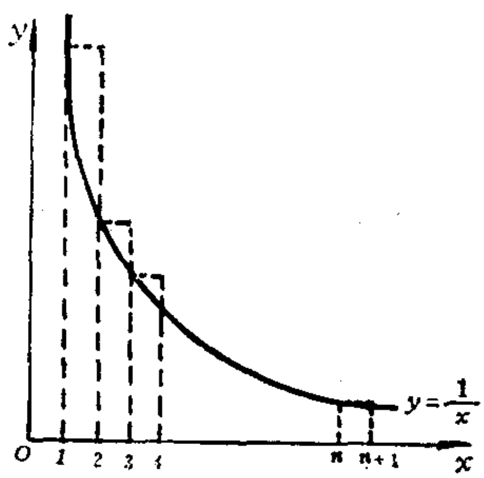


图 11—1

因此，这个级数的前 n 项之和大于$\ln(n+1)$，由于当$n\to\infty$时，$\ln(n+1)\to+\infty$，所以

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散。

习　题　11－1

1．写出下列级数的通项：

（1）$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$；　（2）$\frac{2}{1}-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\cdots$；

（3）$\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}+\cdots$；

（4）$-\frac{1}{2}+0+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}+\frac{3}{6}+\cdots$；

（5）$\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{4}{17}+\cdots$；

（6）$\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{x}{2\cdot 4}+\frac{x\sqrt{x}}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{x^2}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots$。

2．根据级数收敛与发散的定义判别下列级数的敛散性：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；　（2）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}[\ln\ln(n+1)-\ln\ln n]$；

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$；　（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$。

3．判别下列级数的敛散性：

（1）$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\cdots$；　（2）$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\cdots$；

（3）$\frac{3}{2}+\frac{3^2}{2^2}+\frac{3^3}{2^3}+\cdots$；　（4）$-\frac{8}{9}+\frac{8^2}{9^2}-\frac{8^3}{9^3}+\cdots$；

（5）$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\cdots$。

第二节　常数项级数的审敛法

要判断级数是否收敛，可以根据定义，看它的部分和有无极限，但是，部分和的极限一般是不大容易求的．因此，需要建立级数的审敛法。

一、正项级数的审敛法

若级数的每一项都是非负的，这种级数称为**正项级数**。设

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

是一个正项级数，即$u_n\geqslant 0$。记(1)的部分和为s_n，显然s_n是单调增加数列：

$$s_1\leqslant s_2\leqslant\cdots\leqslant s_{n-1}\leqslant s_n\leqslant\cdots.$$

于是有下列两种可能情况：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=+\infty$，此时级数(1)发散；

(2) s_n有界，根据单调有界数列必有极限的准则，知级数(1)收敛。

由此得到如下的重要结论：

基本定理　正项级数(1)收敛的充要条件是：它的部分和数列s_n有界。

由这个基本定理，立即可得下述定理。

定理1（比较审敛法）　设级数(1)与级数

$$v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots \tag{2}$$

都是正项级数。若级数(2)收敛且$u_n\leqslant v_n$($n=1,2,3,\cdots$)，则级数(1)也收敛；若级数(2)发散且$u_n\geqslant v_n$($n=1,2,$

3…），则级数（1）也发散。

例1 讨论p-级数

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots \tag{3}$$

的敛散性，其中常数$p>0$。

解 当$p\leqslant 1$时，因为$\frac{1}{n^p}\geqslant\frac{1}{n}$（$n=1, 2, 3, \cdots$）且调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，所以，由比较审敛法，级数（3）当$p\leqslant 1$时发散。

当$p>1$及$n\geqslant 2$时，从图11—2看出：台阶形的面积比同底的曲边梯形的面积小，所以，由定积分的几何意义可知

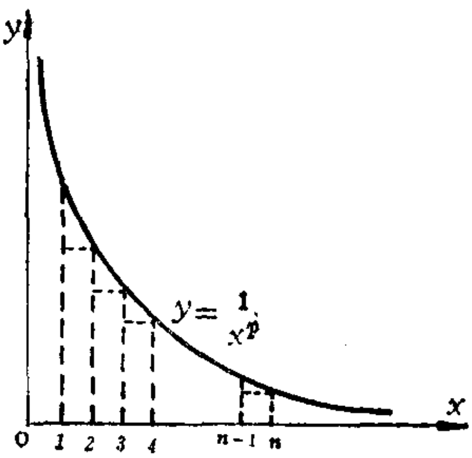


图 11—2

$$s_n=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}$$

$$<1+\int_1^n\frac{dx}{x^p}$$

$$<1+\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{n^{p-1}}\right)<1+\frac{1}{p-1}.$$

即部分和数列s_n有界，于是，由基本定理知此时级数（3）收敛。

在应用中更为方便的是比较审敛法的极限形式，叙述如下

定理1′（比较审敛法的极限形式） 设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$是两个正项级数。如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l\ (0<l<+\infty),$$

则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$同时收敛或同时发散。

例2 判别正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$的敛散性。

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1,$$

而调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是发散的，所以，由定理1′知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$也是发散的。

将所给正项级数与等比级数比较，可得下述在实用上很方便的比值审敛法。

定理2（比值审敛法） 设正项级数（1）的后项与前项之比的极限等于ρ：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho,$$

则当$\rho<1$时级数（1）收敛；当$\rho>1$（或$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty$）时级数（1）发散。

证 （1）设$\rho<1$，取一个适当小的正数ε，使得$\rho+\varepsilon=r<1$。根据极限的定义，存在正整数N，使得当$n\geqslant N$时有不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\rho+\varepsilon=r.$$

因此

$$u_{N+1}<ru_N,\quad u_{N+2}<ru_{N+1}<r^2u_N,\quad u_{N+3}<ru_{N+2}<r^3u_N,\cdots$$

这样，级数

$$u_{N+1}+u_{N+2}+u_{N+3}+\cdots$$

的各项就小于收敛的等比级数（公比 $r<1$）

$$ru_N+r^2u_N+r^3u_N+\cdots$$

的对应项，所以它也收敛。由于级数（1）只比级数（4）多了前N项，因此，根据级数的性质3°，知级数（1）也收敛。

（2）设 $\rho>1$，取一个适当小的正数 ε，使得 $\rho-\varepsilon>1$。根据极限的定义，当 $n\geqslant N$时不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}>\rho-\varepsilon>1,$$

也就是 $u_{n+1}>u_n$，所以当 $n\geqslant N$时，级数的通项u_n是逐渐增大的，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq0$。根据级数收敛的必要条件，知此时级数（1）发散。

类似地，可以证明：当 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty$时，级数(1)发散.

比值审敛法也称为**达朗贝尔判别法**。当 $\rho=1$时，用比值审敛法不能判别级数的敛散性，例如，对于p-级数（3），不论p为何值，都有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{(n+1)^p}=1.$$

但我们知道，当$p\leqslant1$时级数（3）发散；而当$p>1$时，级数（3）收敛。

例 3 判别下列正项级数的敛散性：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{3^n}$；（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n}$；（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2n}$.

解 （1）因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n^4}=\frac{1}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^4$$

$$=\frac{1}{3}<1,$$

所以据比值审敛法，知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{3^n}$收敛。

（2）因为 $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2}=+\infty,$$

所以由比值审敛法，知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n}$发散。

（3）因为$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)\cdot 2n}{(2n+1)(2n+2)}=1$，

所以比值审敛法失效，但若取收敛的p-级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$与它比较，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(2n-1)2n}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{4n-2}=\frac{1}{4},$$

于是由定理1′，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2n}$收敛。

二、交错级数的审敛法

若级数的各项正负相间，则称此级数为**交错级数**，它可以写成如下形式：

$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots$或$-u_1+u_2-u_3+u_4-\cdots$，

其中u_1，u_2，u_3，u_4，…都是正数。

定理3（交错级数审敛法——莱布尼兹定理）

设交错级数

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots \tag{5}$$

满足如下两个条件：

（1）$u_n\geqslant u_{n+1}$（$n=1, 2, 3, \cdots$）；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$，

则级数（5）收敛，且其和$s\leqslant u_1$，而余项r_n则满足不等式$|r_n|\leqslant u_{n+1}$。

证　先证前$2n$项的和s_{2n}的极限存在，为此把s_{2n}写成如下两种形式：

$$s_{2n}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2n-1}-u_{2n})$$

及

$$s_{2n}=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\cdots-(u_{2n-2}-u_{2n-1})-u_{2n}.$$

由条件（1）知所有括号内的差都是非负的。由第一种形式看出，s_{2n}随n的增大而增大，由第二种形式知$s_{2n}<u_1$，于是根据单调有界数列必有极限的准则，推知s_{2n}趋于一个极限s，且$s\leqslant u_1$，即

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n}=s\leqslant u_1 \tag{6}$$

再由$s_{2n+1}=s_{2n}+u_{2n+1}$

及条件(2)得

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}(s_{2n}+u_{2n+1})=\lim_{n\to\infty}s_{2n}+\lim_{n\to\infty}u_{2n+1}$$

$$=s+0=s, \qquad (7)$$

由(6)与(7)知：交错级数(5)收敛于s，且$s\leqslant u_1$。

又，余项r_n可以写成

$$r_n=\pm(u_{n+1}-u_{n+2}+u_{n+3}-\cdots),$$

其绝对值 $|r_n|=u_{n+1}-u_{n+2}+u_{n+3}-\cdots$。

上式右端也是一个交错级数，且满足收敛的两个条件，所以其和不大于它的第一项，即

$$|r_n|\leqslant u_{n+1}.$$

例 4 判别交错级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots \qquad (8)$$

的敛散性。

解 这个级数满足莱布尼兹定理的两个条件：

(1) $u_n=\dfrac{1}{n}>\dfrac{1}{n+1}=u_{n+1}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$,

所以它是收敛的，且其和$s<1$。如果用它的前n项之和

$$s_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

作为和值s的近似值，则它的误差$|r_n|\leqslant\dfrac{1}{n+1}$。

三、绝对收敛与条件收敛

现在讨论任意项级数

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots, \qquad (9)$$

其中u_n（$n=1, 2, 3, \cdots$）为任意实数. 对于这种级数，我们有下面的定理.

定理 4 如果级数(9)的各项的绝对值所成的级数

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots+|u_n|+\cdots \qquad (10)$$

是收敛的，则级数(9)也收敛.

证明从略.

一般地，如果级数(9)的各项的绝对值所组成的正项级数(10)是收敛的，则称级数(9)为**绝对收敛级数**，或称级数是**绝对收敛**的，于是定理4可以叙述成：绝对收敛级数必是收敛的，这给出了任意项级数收敛的一个判别法.

例 5 证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{1+\sigma}}$（$\sigma>0$）是绝对收敛的.

证 因为$\left|\frac{\sin nx}{n^{1+\sigma}}\right|\leqslant\frac{1}{n^{1+\sigma}}$，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\sigma}}$是$p=1+\sigma>1$的$p$-级数，由例1知它是收敛的，再由比较审敛法知$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin nx}{n^{1+\sigma}}\right|$收敛，于是按定理4，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{1+\sigma}}$是绝对收敛的.

当级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛而绝对值级数$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$发散时，称级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是**条件收敛**的。例如，交错级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$是条件收敛的，因为由例4知它本身是收敛的，但它的绝对值级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

却是发散的。

习 题 11—2

1.用比较审敛法判别下列级数的敛散性：

(1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots$；

(2) $\frac{1}{2}+\frac{2}{1+2^2}+\frac{3}{1+3^2}+\cdots+\frac{n}{1+n^2}+\cdots$；

(3) $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+4)}+\cdots$；

(4) $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2^2}+\cdots+\sin\frac{\pi}{2^n}+\cdots$；

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}\ (a>0)$；　　(6) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^2}$。

2.用比值审敛法判别下列级数的敛散性：

(1) $\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{3^2}{2\cdot 2^2}+\frac{3^3}{3\cdot 2^3}+\cdots$；

(2) $\frac{1}{10}+\frac{2!}{10^2}+\frac{3!}{10^3}+\cdots$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$；　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n^2}{n!}$；　(5) $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

3．判别下列级数是否收敛？如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

(1) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}$；

(3) $\frac{1}{2\cdot\ln 2}-\frac{1}{3\cdot\ln 3}+\frac{1}{4\cdot\ln 4}-\cdots$；

(4) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots$；

(5) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\pi^n}\sin\frac{\pi}{n}$.

第三节　幂级数

一、函数项级数的一般概念

设给定一个定义在区间 I 上的函数序列

$$u_1(x),\ u_2(x),\ u_3(x),\ \cdots,\ u_n(x),\ \cdots,$$

则式子

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \qquad (1)$$

叫做（函数项）**无穷级数**，简称（函数项）**级数**。

对于 I 上的每一个值 x_0，函数项级数(1)成为常数项级数

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+u_3(x_0)+\cdots+u_n(x_0)+\cdots, \qquad (2)$$

级数(2)可能收敛也可能发散。如果(2)收敛，则称 x_0 是函数项级数(1)的**收敛点**。如果(2)发散，那么称 x_0 是函数项级数(1)的**发散点**。函数项级数(1)的所有收敛点的全体称为它的**收敛域**。

对应于收敛域内的任一数 x，函数项级数成为一个收敛的常数项级数，因而有一确定的和 s。因此在收敛域上，函数项级数的和是x的函数 $s(x)$。通常称 $s(x)$ 是函数项级数的**和函数**，它的定义域就是级数的收敛域，且写成

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x).$$

把函数项级数(1)的部分和记作 $s_n(x)$，则在收敛域上有

$$\lim_{n\to\infty}s_n(x)=s(x).$$

我们仍把$r_n(x)=s(x)-s_n(x)$叫做函数项级数的**余项**(当然，只有x在收敛域内时，$r_n(x)$才有意义)，于是有

$$\lim_{n\to\infty}r_n(x)=0.$$

函数项级数中最重要的是幂级数和三角级数，我们先讨论幂级数。

二、幂级数及其收敛性

形如

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{3}$$

的函数项级数称为**幂级数**，其中常数a_0，a_1，a_2，…，a_n，…叫做**幂级数的系数**，例如

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,$$

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,$$

$$1+x+2^2x^2+\cdots+n^nx^n+\cdots$$

都是幂级数。

幂级数的更一般形式是

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots, \quad (3)'$$

但如果作变换 $x-x_0=X$，就可以化为(3)的形式，所以在此我们只讨论(3)型的幂级数。

下述定理给出了幂级数的收敛域的特性。

定理1(阿贝尔定理) 如果级数(3)当$x=x_0\neq 0$时收敛，则满足不等式$|x|<|x_0|$的一切x使幂级数(3)绝对收敛；反之，若当 $x=x_0\neq 0$ 时级数(3)发散，则满足不等式 $|x|>|x_0|$的一切x使幂级数(3)发散。

证明从略。

定理1告诉我们：幂级数的收敛域是一个以原点为中心的对称区间，在这个区间之外，幂级数处处发散．也就是说，如果幂级数(3)不是仅在 $x=0$ 一点收敛，也不是在整个数轴上都收敛，则必有一个完全确定的正数 R 存在，它具有如下的性质：

当$|x|<R$时，幂级数(3)绝对收敛；

当$|x|>R$时，幂级数(3)发散；

当$x=R$与$x=-R$时，幂级数(3)可能收敛也可能发散。

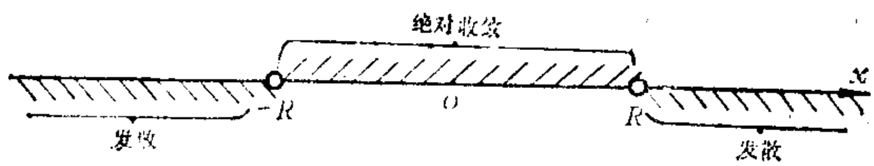


图 11—3

正数R叫做幂级数(3)的**收敛半径**(图11—3).显然，幂级数(3)在点$x=0$处总是收敛的。如果幂级数(3)只在$x=0$处收敛，则规定收敛半径$R=0$，这时收敛域只有一点$x=0$；如果幂级数(3)对一切x都收敛，则规定收敛半径$R=+\infty$，这时收敛域为$(-\infty, +\infty)$。

定理2 设极限

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$$

存在，这里a_n、a_{n+1}是幂级数(3)相邻两项系数，那么

(1)当$\rho\neq 0$时，收敛半径$R=\dfrac{1}{\rho}$；

(2)当$\rho=0$时，$R=+\infty$；

(3)当$\rho=+\infty$时，$R=0$.

证 考察幂级数(3)的各项的绝对值所成的级数

$$|a_0|+|a_1x|+|a_2x^2|+\cdots+|a_nx^n|+\cdots, \qquad (4)$$

这个级数的相邻两项之比为

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x|.$$

(1)如果$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho\neq 0$，则根据比值审敛法，当$\rho|x|<1$即$|x|<\dfrac{1}{\rho}$时，级数(4)收敛，从而级数(3)绝对收敛；当$\rho|x|>1$即$|x|>\dfrac{1}{\rho}$时，级数(4)发散，并且从某一个$n$开始有不等式

$$|a_{n+1}x^{n+1}|>|a_nx^n|,$$

因此通项$|a_nx^n|$不趋于零，从而a_nx^n也不趋于零，所以，当

$|x| > \frac{1}{\rho}$时级数(3)发散. 可见这时收敛半径$R = \frac{1}{\rho}$.

(2)如果$\rho = 0$，则对一切x，$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| \to 0(n\to\infty)$，所以级数(4)收敛，从而级数(3)绝对收敛，于是$R = +\infty$.

(3)如果$\rho = \infty$，则对除了$x = 0$以外的其它一切x值，级数(4)发散；此时(即当$x \neq 0$时)级数(3)必定发散，否则由定理1，将有$x \neq 0$使级数(4)收敛，而这是不可能的，所以$R = 0$.

例1 求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$$

的收敛域.

解 因为

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1,$$

所以收敛半径$R = 1$.

对于端点$x = 1$，级数成为交错级数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots,$$

我们知道它是收敛的.

对于端点$x = -1$，级数成为

$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n} - \cdots = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

显然它是发散的. 所以，该幂级数的收敛域为$(-1, 1]$.

例2 求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2}=(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2^2}+\frac{(x-1)^3}{3^2}+\cdots+\frac{(x-1)^n}{n^2}+\cdots \qquad (5)$$

的收敛域。

解 作代换$X=x-1$，则原级数变成

$$X+\frac{X^2}{2^2}+\frac{X^3}{3^2}+\cdots+\frac{X^n}{n^2}+\cdots. \qquad (6)$$

对幂级数(6)应用定理2，有

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=1,$$

所以，级数(6)的收敛半径$R=1$，因此，级数(5)在$|X|=|x-1|<1$，即$0<x<2$时绝对收敛，当$x=0$与$x=2$时，级数(5)分别成为

$$-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n^2}+\cdots \text{与}$$

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots,$$

它们都是收敛的，因此，幂级数(5)的收敛域为[0，2]。

例3 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$的收敛半径。

解 此级数缺少奇次幂的项，故不能应用定理2。此时可根据比值审敛法来求收敛半径：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2}x^{2(n+1)}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n)!}\cdot\frac{1}{x^{2n}}\right|=4|x|^2,$$

所以，当$4|x|^2<1$，即$|x|<\frac{1}{2}$时级数绝对收敛；而当$4|x|^2>1$，即$|x|>\frac{1}{2}$时级数发散。因此，收敛半径$R=\frac{1}{2}$。

也可以作代换$X=x^2$，然后应用定理2求得收敛半径，这一点留给读者自做。

三、幂级数的运算

1.幂级数的四则运算

设幂级数

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

与幂级数

$$b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots$$

的收敛半径分别为正数R_1与R_2，又$R=\min(R_1, R_2)>0$，那么，这两个幂级数在区间$(-R, R)$内可以进行加法、减法和乘法运算：

加减法：$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n \quad (-R<x<R); \qquad (7)$$

乘法：$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n\right)$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)x^n \quad (-R<x<R). \qquad (8)$$

除法运算本书不作讨论。

2．幂级数的分析运算

设幂级数 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的收敛半径为$R$，则在$(-R, R)$内：

(1)和函数$s(x)$是连续函数；

(2)$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$可以逐项求导，即

$$s'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}n a_n x^{n-1}$$

$$(-R<x<R), \qquad (9)$$

且求导后的幂级数(9)与原幂级数有相同的收敛半径R。

反复应用这个结论可知，幂级数的和函数$s(x)$在$(-R,R)$内任意阶可导。

(3) $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$可以逐项积分，即

$$\int_0^x s(t)dt=\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n\right]dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n t^n dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1} \qquad (-R<x<R), \qquad (10)$$

而且积分后的幂级数(10)与原级数有相同的收敛半径R。

此外，如果逐项求导或逐项积分后的幂级数在$x=R$(或$x=-R$)处收敛，则在$x=R$(或$x=-R$)处，等式(9)或(10)仍然成立。

公式(9)与(10)表明：在$(-R, R)$内，求和运算与微分

运算（或积分运算）可以交换运算次序.

例如，公比为 $-x$ 的等比级数

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$$
$$(-1<x<1). \qquad (11)$$

对(11)逐项求导，得

$$\frac{1}{(1+x)^2}=1-2x+3x^2-\cdots+(-1)^{n-1}nx^{n-1}+\cdots$$
$$(-1<x<1). \qquad (12)$$

对(11)两端从 0 到 x 逐项积分，得

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots$$
$$(-1<x\leqslant 1). \qquad (13)$$

例 4 求幂级数

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$$

的和函数及其收敛域.

解 利用公比为 $-x^2$ 的等比级数

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots$$
$$(-1<x<1),$$

两边从 0 到 x 积分，得

$$\operatorname{arc\,tg}x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}dt$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots,$$

它的收敛半径仍是1。当 $x = 1$ 与 $x = -1$ 时，上式右端的级数成为

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots \text{与}$$

$$-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \cdots - \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots,$$

它们都是收敛的，所以

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

$$(-1 \leqslant x \leqslant 1). \qquad (14)$$

习　题　11—3

1. 求下列幂级数的收敛域：

(1) $x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n + \cdots$；

(2) $1 - x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{3^2} + \cdots$；

(3) $\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \frac{x^3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$.

2. 求下列幂级数的收敛半径：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$；　　(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k}$

（3）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n} x^n$.

3．利用逐项求导或逐项积分，求下列幂级数之和，并指出其收敛域：

（1）$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots$；

（2）$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots$；

（3）$x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$.

第四节　函数展开为幂级数

一、泰勒公式

设函数$y=f(x)$在点x_0的某邻域内可导，则极限

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

存在，从而等式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\alpha(x-x_0) \quad (1)$$

成立，其中$\lim\limits_{x \to x_0} \alpha=0$。也就是说，$f(x)$可用一次多项式

$$P_1(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

来近似表示，所产生的误差

$$R_1(x)=f(x)-P_1(x)=\alpha(x-x_0) \quad (2)$$

当$x \to x_0$时是比$x-x_0$高阶的无穷小。

为了估计误差$R_1(x)$，设$y=f(x)$在点x_0的邻域内二阶可导。注意到$P_1(x_0)=f(x_0)$，$P_1'(x_0)=f'(x_0)$，所以

$R_1(x_0)=R_1'(x_0)=0$。对两个函数$R_1(x)$和$(x-x_0)^2$在以x和x_0为端点的区间上应用柯西中值定理，得

$$\frac{R_1(x)}{(x-x_0)^2}=\frac{R_1(x)-R_1(x_0)}{(x-x_0)^2-0}=\frac{R_1'(\xi_1)}{2(\xi_1-x_0)}$$ (ξ_1在x与x_0之间)。对两个函数$R_1'(x)$与$2(x-x_0)$在以ξ_1和x_0为端点的区间上再次应用柯西中值定理，得

$$\frac{R_1'(\xi_1)}{2(\xi_1-x_0)}=\frac{R_1'(\xi_1)-R_1'(x_0)}{2(\xi_1-x_0)-0}=\frac{R_1''(\xi_2)}{2}=\frac{f''(\xi_2)}{2}$$

(ξ_2在ξ_1与x_0之间，从而也在x与x_0之间)。所以

$$R_1(x)=\frac{f''(\xi_2)}{2!}(x-x_0)^2. \tag{3}$$

于是(1)式成为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(x-x_0)^2. \tag{4}$$

此式称为函数$f(x)$在点x_0处的**一阶泰勒公式**。类似地，由二阶导数的定义及柯西定理可以证明：若$f(x)$在点x_0的邻域内三阶可导，则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+R_2(x), \tag{5}$$

其中

$$R_2(x)=\frac{f'''(\xi_3)}{3!}(x-x_0)^3\quad(\xi_3\text{在}x\text{与}x_0\text{之间}). \tag{6}$$

一般地，我们有如下定理。

定理1（泰勒定理） 如果函数$f(x)$在点x_0的某邻域内具有直到$n+1$阶的导数，则在此邻域内有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x), \tag{7}$$

其中余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{8}$$

而ξ是介于x和x_0之间的某个值。

公式(7)称为函数$f(x)$在点x_0处的n**阶泰勒公式**。当$n=0$时，(7)式成为有限增量公式

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)\quad (\xi\text{在}x\text{与}x_0\text{之间}).$$

因此，泰勒定理是拉格朗日中值定理的推广。

二、泰勒级数

上一节我们已看到，幂级数不仅形式简单，而且有许多特殊性质。由泰勒公式我们自然地想到，能否用幂级数来表示一个函数呢？

如果函数$f(x)$在点x_0处具有任意阶导数，则称幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots \tag{9}$$

为函数$f(x)$在点x_0处的**泰勒级数**。

要使$f(x)$在点x_0的邻域内能用泰勒级数来表示，这个泰勒级数应当有一个大于零的收敛半径，而且这个级数的和函数

要等于 $f(x)$。为此，由公式(7)，我们只要能证明：在点 x_0 的某邻域内，余项

$$R_n(x)=f(x)-s_{n+1}(x)$$
$$=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\to 0\ (n\to\infty)$$

就行了。

定理 2 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的泰勒级数在点 x_0 的某邻域内收敛于 $f(x)$ 的充分必要条件是：$f(x)$ 的泰勒公式中的余项 $R_n(x)$ 在点 x_0 的该邻域内，当 n 无限增大时的极限等于零。

于是，在点 x_0 的邻域内，当 $R_n(x)\to 0\ (n\to\infty)$ 时，函数 $f(x)$ 的泰勒级数(9)的和函数就是 $f(x)$，即 $f(x)$ 的精确表达式为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots. \tag{10}$$

这时我们称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可**展开成泰勒级数**，或称(10)的右端是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的**泰勒展开式**。

当 $x_0=0$ 时，(10)式成为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}+\cdots, \tag{11}$$

上式右边的幂级数称为函数 $f(x)$ 的**麦克劳林级数**。

把函数展开成泰勒级数，就是用幂级数来表示函数。现在我们证明，这种展开式是唯一的。

定理 3 如果函数 $f(x)$ 能表示为 x 的幂级数，即

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots, \qquad (12)$$

那么，这个幂级数与函数$f(x)$的麦克劳林级数（11）是一致的。

证 设幂级数(12)的收敛半径为$R>0$，则它在$(-R, R)$内是可以逐项求导的，所以

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots,$$

$$f''(x)=2!a_2+3\cdot2a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots,$$

$$\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=n!a_n+(n+1)n(n-1)\cdots3\cdot2a_{n+1}x+\cdots,$$

$$\cdots\cdots$$

把$x=0$代入(12)式和以上各式，得

$$a_0=f(0),\ a_1=f'(0),\ a_2=\frac{f''(0)}{2!},\ \cdots,$$

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!},\ \cdots,$$

所以，级数（12）与级数（11）是完全一致的。

三、把函数展开成幂级数

要把已知函数$f(x)$展开成x的幂级数，就是求$f(x)$的麦克劳林级数，可以按照下列步骤进行。

第一步 求出函数$f(x)$及其各阶导数在$x=0$处的值：

$$f(0),\quad f'(0),\quad f''(0),\ \cdots,\quad f^{(n)}(0),\ \cdots$$

其中有一个值不存在时，$f(x)$就不能在$x=0$展开成幂级数。

第二步 求出幂级数

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

的收敛半径R和收敛域。

第三步 考察当x在收敛域内时余项$R_n(x)$的极限

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\text{（}\xi\text{在0与}x\text{之间）}$$

是否为零。如果$\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$，则第二步求出的幂级数就是函数$f(x)$的幂级数展开式。

例1 将函数$f(x)=e^x$展开成x的幂级数。

解 因为$f^{(n)}(x)=e^x$，所以$f(0)=1$，$f^{(n)}(0)=1$（$n=1, 2, \cdots$），于是得幂级数

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots.$$

容易求出它的收敛半径$R=+\infty$。

对任何有限数x，余项的绝对值为

$$|R_n(x)|=\left|\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0\text{（}n\to\infty,$$

ξ在0与x之间），这是因为$\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$是收敛级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$的通项，故$\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0$（$n\to\infty$），而$e^{|x|}$是有限值，于是我们得到展开式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty)\quad(13)$$

例2 求$f(x)=\sin x$的幂级数展开式。

解 因为$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以$f^{(n)}(0)$顺次循环地取值0，1，0，$-1$，（$n=0, 1, 2, 3, \cdots$），于是得麦克劳林级数

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots,$$

它的收敛半径$R=+\infty$。

对于任何有限数 x，余项的绝对值

$$|R_n(x)|=\left|\frac{\sin\left(\xi+\frac{n+1}{2}\pi\right)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0$$

$$(n\to\infty,\ \xi\text{在 0 与}x\text{之间})。$$

因此得展开式

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$$

$$(-\infty<x<+\infty)。\qquad(14)$$

例 3 把函数 $f(x)=(1+x)^m$ 展开为幂级数，其中m 是任意实数。

解 因为 $f'(x)=m(1+x)^{m-1}$,

$f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2}$, …,

$f^{(n)}(x)=m(m-1)\cdots(m-n+1)\cdot(1+x)^{m-n}$, …,

所以

$f(0)=1, f'(0)=m$, $f''(0)=m(m-1)$, …,

$f^{(n)}(0)=m(m-1)\cdots(m-n+1)$, …。

由此得幂级数

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots,$$

它的收敛半径为 1。

可以证明这个展开式余项$R_n(x)\to 0$($n\to\infty$, $|x|<1$),所以得到展开式

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots$$
$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots\quad(-1<x<1).\quad(15)$$

当 $x=1$ 或 $x=-1$ 时，(15)式成立与否要视 m 的数值而定。

公式(15)叫做**二项展开式**。特别地，当 m 为正整数时，(15)式的右端是 x 的 m 次多项式，它就是代数学中的二项式定理。

以上把函数展开成幂级数的例子，是直接按公式 $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ 计算幂级数的系数，最后考察余项 $R_n(x)$ 是否趋于零。这种方法称为**直接展开法**.这个方法的计算量较大，且余项的研究并不容易，我们在很多情况下可以利用已知的函数展开式及幂级数的运算，把所给的函数展开为幂级数，这种方法叫做**间接展开法**。根据展开的唯一性，可知它与用直接方法所得的结果是相同的。

例 4 求函数 $\frac{1}{2x^2+x-1}$ 的麦克劳林展开式。

解 因为
$$\frac{1}{2x^2+x-1}=\frac{1}{(x+1)(2x-1)}$$
$$=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1-2x}\right),$$

而

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n+\cdots(-1<x<1).$$
$$\frac{1}{1-2x}=1+2x+4x^2+8x^3+\cdots+2^nx^n+\cdots$$
$$\left(-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\right),$$

所以，由幂级数的加法运算，得

$$\frac{1}{2x^2+x-1}=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1-2x}\right)$$

$$=-\frac{1}{3}\{[1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots]$$

$$+2[1+2x+4x^2+8x^3+\cdots+2^n x^n+\cdots]\}$$

$$=-1-x-3x^2-5x^3-\cdots-\frac{1}{3}[2^{n+1}+(-1)^n]x^n-\cdots$$

$$\left(-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\right).$$

例 5 将函数$\frac{1}{x}$展开成$(x-3)$的幂级数，即在 $x=3$ 处展开为泰勒级数。

解 $$\frac{1}{x}=\frac{1}{3+(x-3)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-3}{3}}$$

$$=\frac{1}{3}\left[1-\frac{x-3}{3}+\frac{(x-3)^2}{3^2}-\cdots+(-1)^n\frac{(x-3)^n}{3^n}+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{x-3}{3^2}+\frac{(x-3)^2}{3^3}-\cdots+(-1)^n\frac{(x-3)^n}{3^{n+1}}+\cdots$$

$$(0<x<6).$$

式中收敛域$0<x<6$ 是从公比$\frac{x-3}{3}$在-1与1之间，即从不等式$-1<\frac{x-3}{3}<1$求出来的。

级数的应用十分广泛．例如，幂级数可以用来计算函数值（包括收敛级数的和）的近似值，对定积分作近似计算，以及

用于常微分方程的幂级数解之中。

例 6 计算$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-x^2}dx$，精确到$10^{-4}$。

解 在e^x的展开式中用$-t^2$代替x，得

$$e^{-t^2}=1-t^2+\frac{t^4}{2}-\cdots+(-1)^n\frac{t^{2n}}{n!}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{n!}\qquad(-\infty<t<+\infty).$$

逐项积分，得

$$\int_0^x e^{-t^2}dt=\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{n!}\right]dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^x t^{2n}dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}\quad(-\infty<x<+\infty).\quad(16)$$

在上式中令$x=1$，得

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5\cdot 2!}-\frac{1}{7\cdot 3!}+\cdots$$

$$+(-1)^n\frac{1}{n!\,(2n+1)}+\cdots,$$

用这个级数的前 7 项来计算，其误差小于

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{15\cdot 7!}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{37800}<0.00004,$$

所以

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5\cdot 2!}-\frac{1}{7\cdot 3!}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{9\cdot 4!}-\frac{1}{11\cdot 5!}+\frac{1}{13\cdot 6!}\right)=0.8427.$$

最后，我们把几个常用的初等函数的幂级数展开式汇集于下：

1° $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad (-\infty<x<+\infty)$；

2° $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (-\infty<x<+\infty)$；

3° $\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (-\infty<x<+\infty)$；

4° $\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n \qquad (-1<x<1)$；

5° $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (-1<x\leqslant 1)$；

6° $(1+x)^m=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n$

$(-1<x<1)$；

7° $\mathrm{arctg}\,x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1)$。

习 题 11—4

1．将下列函数展开成 x 的幂级数，并求其收敛域：

(1) $\mathrm{sh}\,x$； (2) a^x ($a>0$)； (3) $\sin^2 x$；

(4) $\ln\frac{1+x}{1-x}$;　　(5) $\arcsin x$；　　(6) $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$；

2．将$\frac{1}{x^2+3x+2}$展开成 $(x+4)$ 的幂级数.

3．将$\lg x$ 在 $x_0=1$处展开为泰勒级数.

4．若函数的幂级数展开式的收敛半径 $R>0$，则对于模小于 R 的复数，展开式仍然成立.由此证明欧拉公式：

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x,$$

式中x是实数，$i=\sqrt{-1}$.

*第五节　傅立叶级数

除了前面所讨论的幂级数外，还有一类在理论上和应用上很重要的函数项级数，就是三角级数。它的一般形式是

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\qquad(1)$$

其中a_0、a_n、b_n($n=1,\ 2,\ \cdots$)都是常数。由于2π是三角级数(1)中各三角函数的共同周期，因此不难验证，如果级数(1)收敛，则和函数必是以2π为周期的周期函数。那么，是不是以2π为周期的函数都能展成三角级数(1)呢？如能这样做，(1)的系数怎么求？我们来讨论这些问题。

一、周期为2π的函数的傅立叶级数

1.三角函数的正交性

我们称函数系

$$1,\cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cdots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \cdots$$

为**三角函数系**。三角级数(1)中的各项都是由三角函数系中的

函数乘以常数后得到的。

三角函数系有下面的重要性质：

性质1° 三角函数系中任意两个不同函数的乘积在$[-\pi,\pi]$上的积分为零，即

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nx dx=0\quad(n=1,2,\cdots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nx dx=0\quad(n=1,2,\cdots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx dx=0\,(m、n=1,2,\cdots,m\neq n),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx dx=0\quad(m、n=1,2,\cdots,m\neq n),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx dx=0\quad(m、n=1,2,\cdots).$$

这一性质称为三角函数系的**正交性**。读者可以通过计算定积分直接验证。

性质2° 三角函数系中任意一个函数的平方在$[-\pi,\pi]$上的积分不为零。这类积分共有三种类型，它们是

$$\int_{-\pi}^{\pi}1^2 dx=2\pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx dx=\pi\quad(n=1,2,\cdots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx dx=\pi\quad(n=1,2,\cdots).$$

三角函数系的这两个性质为把周期是2π的函数展成三角级数（1）提供了很大的方便。

假定周期是2π的函数可以展开为三角级数（1），即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\tag{2}$$

并且假定(2)式右端的级数可以逐项积分，我们来讨论 a_0，a_n，b_n 与函数 $f(x)$ 的关系。

对(2)式的两边在 $[-\pi, \pi]$ 上逐项积分，则有

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right],$$

由三角函数系的正交性知道，上式右边除第一项外，所有积分都等于零，所以

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx = a_0\pi,$$

即

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$$

在(2)式的两边乘以 $\cos mx$（m 为正整数）后再在 $[-\pi, \pi]$ 上逐项积分，则有

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\cos mx dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\cos mx dx \right],$$

由三角函数系的性质，右边除 $n = m$ 项是

$$a_m\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx$$

外，其余各项的积分都等于零，于是

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx = a_m\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx = a_m\pi,$$

即

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx \qquad (m=1,\ 2,\ \cdots),$$

或者表示为

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

类似地，如果在(2)式的两边乘以$\sin mx$(m为正整数)后再在$[-\pi,\ \pi]$上逐项积分，则又可得到b_n与$f(x)$的关系式：

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

这样，就导出了a_0，a_n，b_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$的计算公式，其中a_0和a_n的计算公式可以合并成一个公式，即

$$\left.\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots),\\ b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\ (n=1,\ 2,\ \cdots).\end{aligned}\right\}(3)$$

由公式(3)所确定的常数a_0，a_n，b_n $(n=1,2,\cdots)$称为函数$f(x)$的**傅立叶系数**。把三角级数(1)中的系数用$f(x)$的傅立叶系数代入所得到的级数就称为函数$f(x)$的**傅立叶级数**.

2．收敛定理

上面的推理表明，如果以2π为周期的函数$f(x)$能够展成可逐项积分的三角级数，那么，这个三角级数一定就是$f(x)$的傅立叶级数。

现在提出一个相反的问题。设$f(x)$是周期为2π的函数，且(3)式中的积分存在，则可以写出它的傅立叶级数。这个级数是否一定收敛？如果收敛，和函数是否就是$f(x)$？显然这与函数$f(x)$本身所具有的性质有关。下面叙述一个收敛定理，它回答了我们提出的问题。

收敛定理（狄里克雷充分条件） 设$f(x)$是周期为2π的周期函数，如果它在$[-\pi,\pi]$上连续或只有有限个第一类间断点，并且至多只有有限个极值点，则$f(x)$的傅立叶级数收敛，并且

(1)当x是$f(x)$的连续点时，级数收敛于$f(x)$。

(2)当x是$f(x)$的间断点时，级数收敛于$\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$。

特别，在端点$x=\pm\pi$处，级数收敛于$\dfrac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}$。

定理中所提出的条件通常称为狄里克雷条件，简称为**狄氏条件**.它比函数展成幂级数的条件低得多.根据这一收敛定理，我们就可以把周期为2π的函数展成它的傅立叶级数了。

例1 设$f(x)$是周期为2π的函数（图11—4)，它在$[-\pi,\pi)$上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$$

（1）求$f(x)$的傅立叶级数及其和函数；

（2）把$f(x)$展成傅立叶级数。

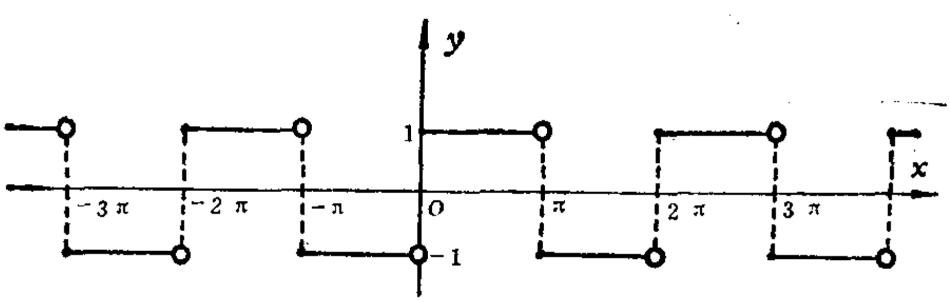


图 11—4

解 （1） 由公式（3），$f(x)$的傅立叶系数为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\cdot dx$$

$$=-1+1=0;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nx dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\cdot\cos nx dx$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{0}^{\pi}=0$$

$$(n=1,\ 2,\ \cdots);$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nx dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\cdot\sin nx dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{0}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}-\frac{\cos n\pi}{n}\right]+\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos n\pi}{n}+\frac{1}{n}\right]$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{4}{n\pi}, & \text{当}n=1,\ 3,\ 5,\ \cdots\text{时},\\ 0, & \text{当}n=2,\ 4,\ 6,\ \cdots\text{时}.\end{cases}$$

于是 $f(x)$的傅立叶级数为

$$\frac{4}{\pi}\left[\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots+\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x+\cdots\right].$$

函数$f(x)$在$[-\pi, \pi]$上满足狄氏条件，点$x=k\pi$（$k=0$，±1，±2，…）是$f(x)$的第一类间断点，其左、右极限的平均值都是$\frac{(-1)+1}{2}=0$，在其它点处$f(x)$都连续，由收敛定理得

$$\frac{4}{\pi}\left[\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots+\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x+\cdots\right]$$

$$=\begin{cases} f(x), & x\neq k\pi,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots, \\ \frac{(-1)+1}{2}=0, & x=k\pi,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots. \end{cases}$$

和函数的图形如下（注意它与图11—4的差别）。

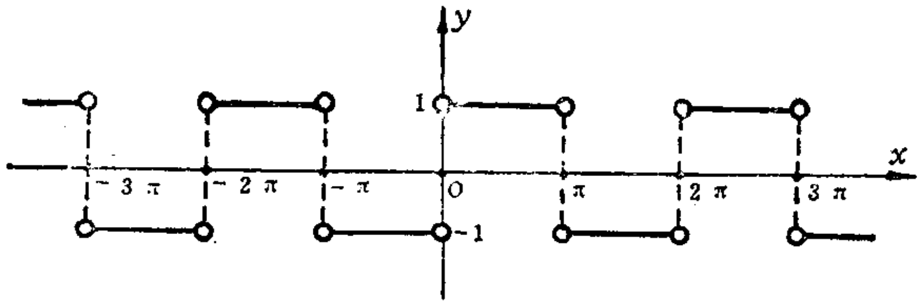


图 11—5

（2） 由（1）知$f(x)$的傅立叶级数在$x\neq k\pi$（$k=0$，±1，±2，…）处收敛于$f(x)$，故得$f(x)$的傅立叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left[\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots+\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x+\cdots\right]\quad(x\neq k\pi,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots).$$

如果把例1中的函数理解为周期$T=2\pi$，幅值$E=1$的矩形波的波形函数（此时自变量x表示时间），那么上面的展开式表明矩形波是由一系列不同频率的正弦波叠加而成的。一般地说，一个比较复杂的周期运动都可以通过把它的波形函数展

开成傅立叶级数，从而把它看成许多不同频率的简谐振动的叠加。因此，傅立叶级数在周期运动的研究中有着广泛的应用。

例 2　设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数（图11—6），它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-\pi, & -\pi\leqslant x<0,\\ x, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$$

把 $f(x)$ 展开为傅立叶级数.

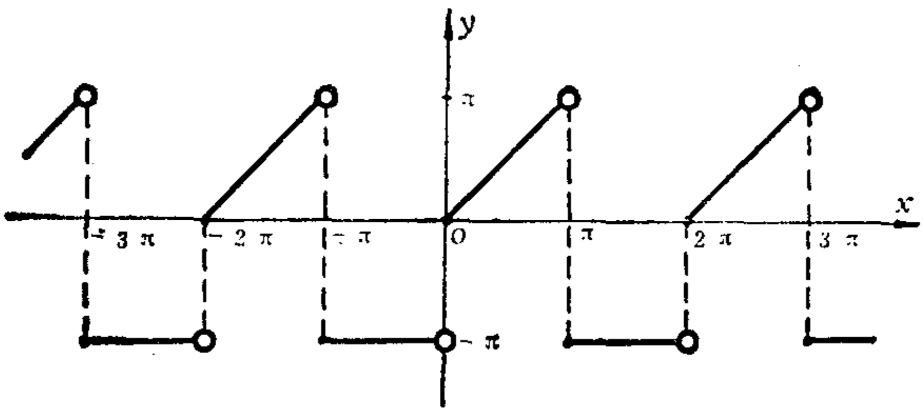


图　11—6

解　函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上满足狄氏条件，由收敛定理，它的傅立叶级数收敛，当 $x=(2k+1)\pi$ 时，级数收敛于 $\dfrac{\pi+(-\pi)}{2}=0$，当 $x=2k\pi$ 时，级数收敛于 $\dfrac{-\pi+0}{2}=-\dfrac{\pi}{2}$，在其它点处收敛于 $f(x)$。和函数的图形如图11—7所示.

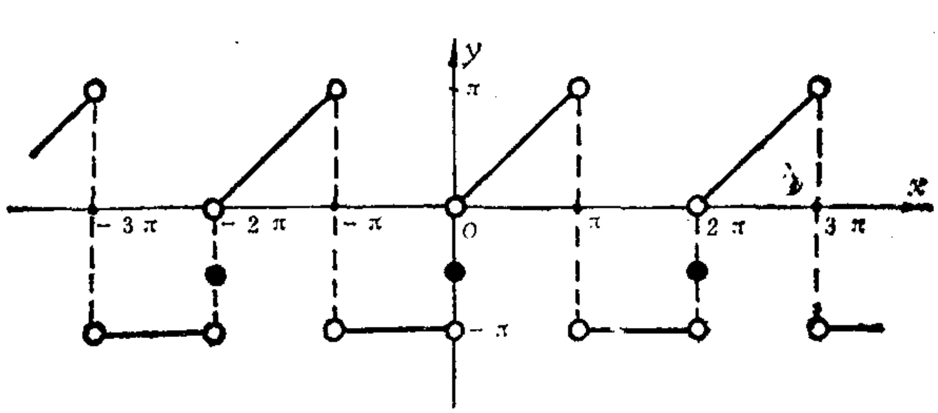


图　11—7

$f(x)$的傅立叶系数为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\pi)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}xdx$$

$$=-\frac{\pi}{2};$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\pi)\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{-\pi\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{0}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}[\cos n\pi-1]=\frac{1}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{-2}{n^2\pi}, & \text{当}n=1,\ 3,\ 5,\ \cdots\text{时}, \\ 0, & \text{当}n=2,\ 4,\ 6,\ \cdots\text{时};\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\pi)\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_{0}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{n}[1-(-1)^n]+\left[-\frac{(-1)^n}{n}\right]$$

$$=\frac{1}{n}[1-2(-1)^n]$$

$$=\begin{cases}\frac{3}{n}, & \text{当}n=1,\ 3,\ 5,\ \cdots\text{时},\\ -\frac{1}{n}, & \text{当}n=2,\ 4,\ 6,\ \cdots\text{时};\end{cases}$$

根据以上讨论，$f(x)$的傅立叶展开式为

$$f(x)=-\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\cos x+3\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$-\frac{2}{3^2\pi}\cos 3x+\sin 3x-\frac{1}{4}\sin 4x-\cdots$$

$$(x\neq k\pi,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots).$$

3．偶函数与奇函数的傅立叶级数

当我们把一个偶函数（或奇函数）展成傅立叶级数时，可以利用偶函数（或奇函数）在对称区间上积分的性质简化傅立叶系数的计算．

设$f(x)$是周期为2π的偶函数，则$f(x)\cos nx$是偶函数，$f(x)\sin nx$是奇函数．所以，偶函数$f(x)$的傅立叶系数计算公式为

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots),\qquad(4)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=0\quad(n=1,\ 2,\ \cdots),$$

即偶函数$f(x)$的傅立叶级数是不含正弦函数的**余弦级数**

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx.$$

类似地，如果$f(x)$是周期为2π的奇函数，则其傅立叶系数计算公式为

$$a_n=0\qquad(n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\quad(n=1,2\cdots),\qquad(5)$$

即奇函数$f(x)$的傅立叶级数是不含常数项及余弦函数的**正弦级数**

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx.$$

例 3 把周期函数$f(x)=|E\sin x|$（图11—8）展开成傅立叶级数，其中E是正的常数。

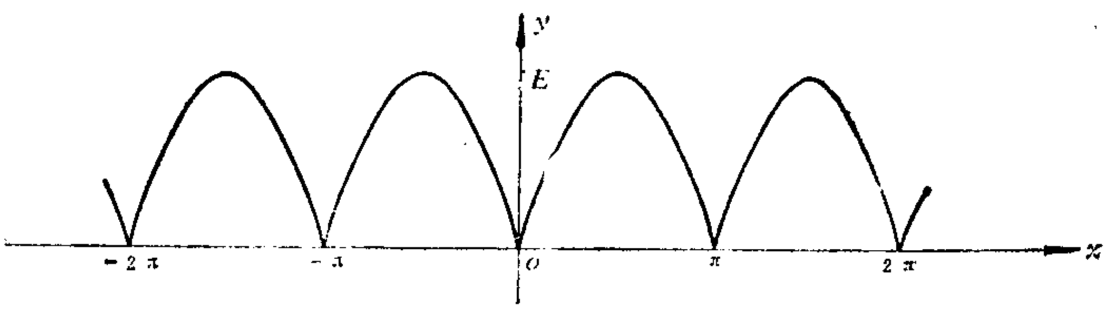


图 11—8

解 函数$f(x)$可以看作周期为2π的偶函数，它在$(-\infty,+\infty)$内连续且满足狄氏条件，所以它的傅立叶级数是余弦级数，且处处收敛于$f(x)$。

由偶函数的傅立叶系数计算公式（4），得

$$b_n=0,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}E\sin x\cos nx\,dx$$

$$=\frac{E}{\pi}\int_0^\pi[\sin(n+1)x-\sin(n-1)x]dx$$

$$=\frac{E}{\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1}+\frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^\pi$$

$$=\frac{E}{\pi}\left[\frac{1-\cos(n+1)\pi}{n+1}+\frac{\cos(n-1)\pi-1}{n-1}\right]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{-4E}{(n^2-1)\pi}, & \text{当}n=0,\ 2,\ 4,\ \cdots\text{时}, \\ 0, & \text{当}n=3,\ 5,\ 7,\ \cdots\text{时}.\end{cases}$$

当$n=1$时，上述计算过程不适用，所以a_1必须另行计算。

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos x dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi E\sin x\cos x dx$$

$$=\frac{2E}{\pi}\left[\frac{\sin^2 x}{2}\right]_0^\pi=0,$$

所以$|E\sin x|$的傅立叶级数展开式为

$$|E\sin x|=\frac{4E}{\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cos 2x-\frac{1}{15}\cos 4x-\frac{1}{35}\cos 6x-\cdots\right)\ (-\infty<x<+\infty).$$

二、定义在$[-\pi,\pi]$或$[0,\pi]$上的函数的傅立叶级数

如果函数$f(x)$只在区间$[-\pi,\pi]$上有定义，并且满足狄氏条件，也能把$f(x)$展开为傅立叶级数。我们可以在$[-\pi,\pi)$或$(-\pi,\pi]$外补充函数$f(x)$的定义，使$f(x)$拓广成周期

为2π的周期函数$F(x)$。按这种方式拓广函数定义域的过程称为**周期延拓**。显然，拓广所得的周期函数$F(x)$在$(-\pi,\ \pi)$内与所给函数$f(x)$是完全一致的（图11—9）。

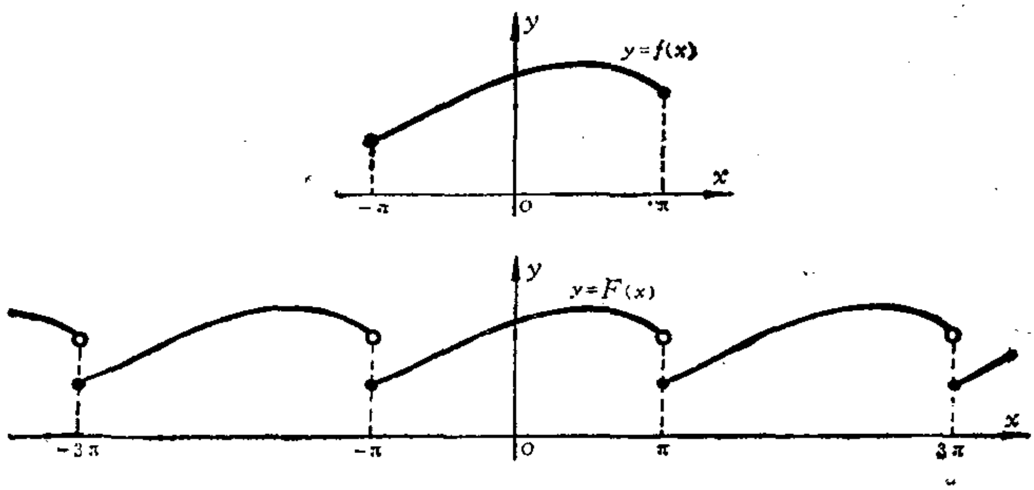


图 11—9

因此，若把$F(x)$展开成傅立叶级数

$$F(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\qquad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\qquad(n=1,\ 2,\ \cdots),$$

再把x限制在$(-\pi,\ \pi)$内，就可得到$f(x)$的傅立叶级数展开式。根据收敛定理，这级数在区间端点$x=\pm\pi$处收敛于

$\frac{1}{2}[F(\pi-0)+F(-\pi+0)]$。但由于在$(-\pi,\pi)$内，$F(x) \equiv f(x)$，所以，$F(\pi-0)=f(\pi-0)$，$F(-\pi+0)=f(-\pi+0)$，从而这级数在区间端点$x=\pm\pi$处收敛于

$$\frac{1}{2}[f(\pi-0)+f(-\pi+0)].$$

例 4 把函数(图11—10)

$$f(x)=\begin{cases} x, & -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ 0, & 0<x \leqslant \pi \end{cases}$$

展成傅立叶级数。

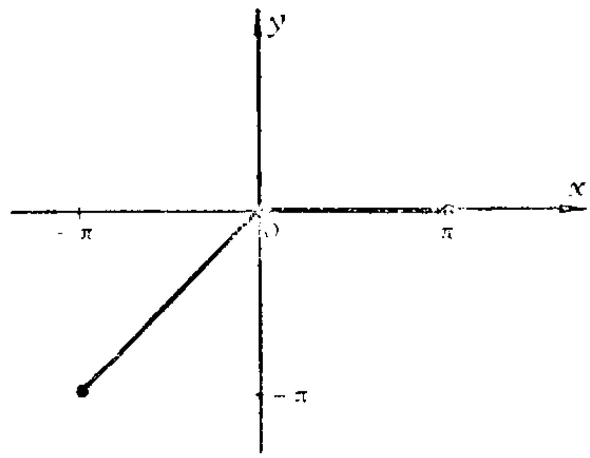


图 11—10

解 函数 $f(x)$ 是定义在$[-\pi,\pi]$上的函数，并且满足狄氏条件。由于 $f(x)$ 在$(-\pi,\pi)$内连续，所以，它的傅立叶级数在$(-\pi,\pi)$内收敛于$f(x)$；而在端点$x=\pm\pi$处，级数收敛于

$$\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}=\frac{0+(-\pi)}{2}=-\frac{\pi}{2}.$$

$f(x)$的傅立叶系数为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x dx=-\frac{\pi}{2};$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos nx dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0}$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}[1-(-1)^n]$$

$$
=\begin{cases} \dfrac{2}{n^2\pi}, & \text{当} n=1,\ 3,\ 5,\ \cdots \text{时}, \\ 0, & \text{当} n=2,\ 4,\ 6,\ \cdots \text{时}; \end{cases}
$$

$$
b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin nx dx
$$

$$
=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0}
$$

$$
=(-1)^{n+1}\frac{1}{n} \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).
$$

所以，$f(x)$的傅立叶级数展开式为

$$
f(x)=-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\cos x+\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x
$$

$$
+\frac{2}{3^2\pi}\cos 3x+\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{4}\sin 4x+\cdots
$$

$$
(-\pi<x<\pi).
$$

在研究某些实际问题时，有时还需要把定义在$[0,\pi]$上的函数展成正弦级数或余弦级数。这类问题可以处理如下。

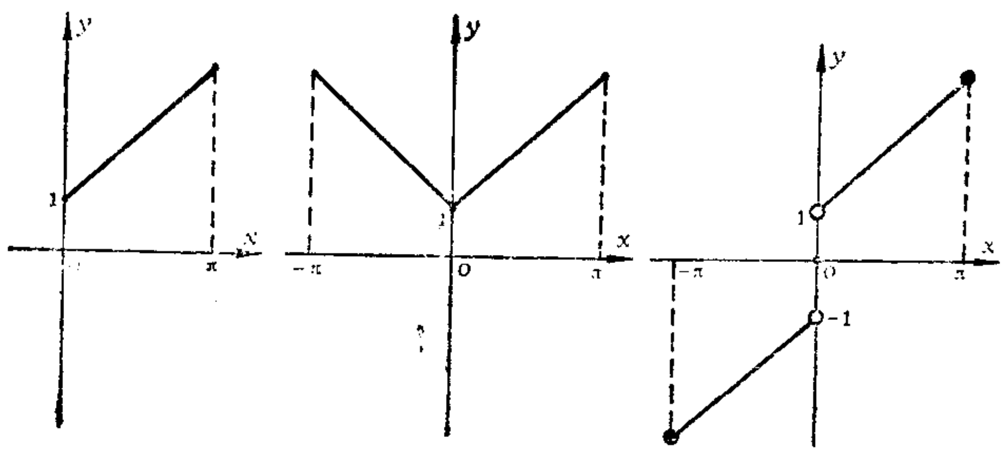
设函数$f(x)$定义在区间$[0,\pi]$上，并且满足狄氏条件，我们在区间$[-\pi,0)$内补充函数$f(x)$的定义，把它拓广为定义在$[-\pi,\pi]$上的偶函数$F_1(x)$（这种拓广称为**偶式延拓**），再把$F_1(x)$展成余弦级数，把x限制在$[0,\pi]$上，就得到$f(x)$的余弦级数展开式了。类似地，如果在区间$[-\pi,0)$内补充函数$f(x)$的定义，把它拓广为定义在$[-\pi,\pi]$上的奇函数$F_2(x)$（这种拓广称为**奇式延拓**，若$f(0)\neq 0$，则可改变$x=0$处的定义，规定$F_2(0)=0$，以便符合奇函数的要求），然后把$F_2(x)$展成正弦级数，在$(0,\pi]$内，$F_2(x)\equiv f(x)$，这样就得到了$f(x)$的正弦级数

展开式。

例 5 把函数$f(x)=x+1$ （$0\leqslant x\leqslant\pi$）分别展开为余弦级数和正弦级数。

解 $f(x)$是定义在$[0，\pi]$上并满足狄氏条件的函数[图11—11(a)]。

先求$f(x)$的余弦级数展开式，为此，把$f(x)$进行偶式延拓[图11—11(b)]，根据收敛定理，$f(x)$的余弦级数在$[0，\pi]$上收敛于$f(x)$。



(a) (b) (c)

图 11—11

由偶函数的傅立叶系数计算公式

$$b_n=0 \qquad (n=1,2,\cdots);$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(x+1)dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^\pi=\pi+2,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(x+1)\cos nx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}+\frac{\sin nx}{n}\right]_0^\pi$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{4}{n^2\pi}, & 当n=1, 3, 5, \cdots时,\\ 0, & 当n=2, 4, 6, \cdots时.\end{cases}$$

所以 $f(x)$的余弦级数展开式为

$$x+1=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right)$$

$$(0\leqslant x\leqslant\pi).$$

其次求 $f(x)$的正弦级数展开式，为此，对$f(x)$进行奇式延拓[图11—11(c)]，由收敛定理知，$f(x)$的正弦级数在$(0, \pi)$内收敛于$f(x)$，而在$x=0$、π处则收敛于零。

由奇函数的傅立叶系数计算公式

$$a_n=0 \qquad (n=0, 1, 2, \cdots);$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\sin nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n(1+\pi)] \qquad (n=1, 2, \cdots).$$

所以 $f(x)$的正弦级数展开式为

$$x+1=\frac{2}{\pi}\left[(2+\pi)\sin x-\frac{\pi}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}(2+\pi)\sin 3x\right.$$

$$\left.-\frac{\pi}{4}\sin 4x+\cdots\right] \qquad (0<x<\pi).$$

三、周期为2 l 的函数的傅立叶级数

到现在为止．我们所讨论的函数都是以2π为周期的函数，在实际应用上还常常遇到不以2π为周期的周期函数，它们的傅立叶级数可以用适当的变量代换并利用前面的结论推得．

设函数$f(x)$的周期为$2l$，在$[-l, l]$上满足狄氏条件，作变量代换

$$t=\frac{\pi x}{l},$$

则区间$-l\leqslant x\leqslant l$就变换成相应的区间$-\pi\leqslant t\leqslant\pi$。

记
$$f(x)=f\left(\frac{lt}{\pi}\right)=F(t),$$

则$F(t)$是周期为2π的函数，且在$[-\pi, \pi]$上满足狄氏条件．求出$F(t)$的傅立叶级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$

其中
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)\cos nt\,dt\quad(n=0, 1, 2, \cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)\sin nt\,dt\quad(n=1, 2, \cdots).$$

用$t=\dfrac{\pi x}{l}$代入，注意到$F(t)=f(x)$，就得到$f(x)$的傅立叶级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),\tag{6}$$

其中 $$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,2,\cdots).$$

级数（6）在$f(x)$的连续点处收敛于$f(x)$，而在间断点处收敛于$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$.

容易证明，若$f(x)$是偶函数，则$f(x)$的傅立叶级数是余弦级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l},$$

其中 $$a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

若$f(x)$是奇函数，则$f(x)$的傅立叶级数是正弦级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

其中 $$b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,2,\cdots).$$

类似地，可以通过周期延拓把定义在$[-l, l]$上的函数展成傅立叶级数，该级数在区间端点处收敛于$\frac{1}{2}[f(l-0)+f(-l+0)]$；也可以通过偶式延拓或奇式延拓把定义在$[0, l]$上的函数展成余弦级数或正弦级数.

例6 设$f(x)$是周期为4的函数（图11—12），在$[-2, 2)$内表达式为

$$f(x)=\begin{cases}0, & -2\leqslant x\leqslant 0,\\ 1, & 0<x<2.\end{cases}$$

把 $f(x)$展成傅立叶级数.

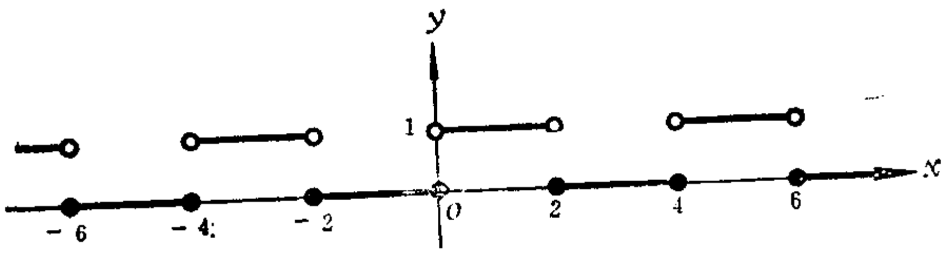


图 11—12

解 函数 $f(x)$的周期为4，即 $l=2$，并在$[-2, 2]$内满足狄氏条件，由收敛定理，$f(x)$的傅立叶级数在$x=2k$处收敛于$\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$，在$x\neq 2k$处收敛于$f(x)$（$k=0$，$\pm 1$，$\pm 2$，…）.

$f(x)$ 的傅立叶系数为

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}1\,dx=1;$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}1\cos\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_{0}^{2}=0 \qquad (n=1, 2, \cdots);$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 1\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$=\frac{1}{n\pi}[1-(-1)^n]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{n\pi}, & \text{当}n=1,\ 3,\ 5,\ \cdots\text{时},\\ 0, & \text{当}n=2,\ 4,\ 6,\ \cdots\text{时}.\end{cases}$$

所以，$f(x)$的傅立叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2}+\cdots\right)\ (x\neq 2k, k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

例7 展开函数$f(x)=x^2$（$-1\leqslant x\leqslant 1$）为傅立叶级数．

解 所给函数只是在$[-1,\ 1]$上有定义，并满足狄氏条件（图11—13，其中虚线为经周期延拓后函数图形），根据收敛定理，$f(x)$的傅立叶级数在$[-1,\ 1]$上收敛于$f(x)$。

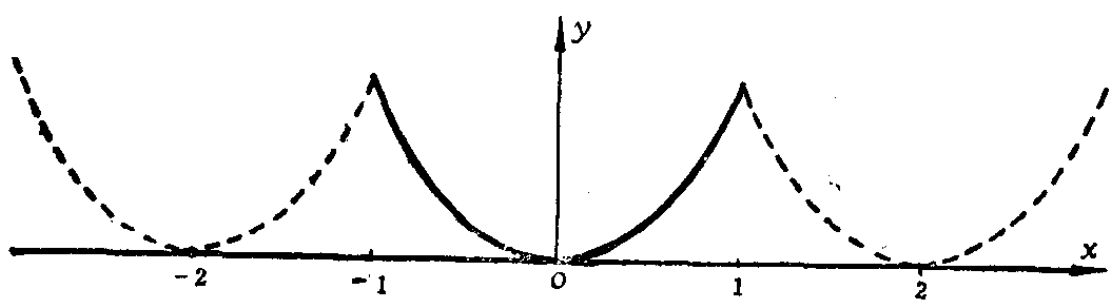


图 11—13

因为$f(x)=x^2$是偶函数，$l=1$，所以$f(x)$的傅立叶系数为

$$b_n = 0 \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots);$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3};$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = 2\int_0^1 x^2\cos n\pi x dx$$

$$= \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x^2 d(\sin n\pi x)$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[x^2\sin n\pi x\right]_0^1 - \frac{4}{n\pi}\int_0^1 x\sin n\pi x dx$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi - \frac{4}{n^2\pi^2}\left[\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\right]_0^1$$

$$= (-1)^n\frac{4}{n^2\pi^2} \ (n=1,\ 2,\ \cdots),$$

于是有傅立叶级数展开式

$$x^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\left(-\cos\pi x + \frac{1}{2^2}\cos 2\pi x - \frac{1}{3^2}\cos 3\pi x + \frac{1}{4^2}\cos 4\pi x - \cdots\right) \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1).$$

例8 把函数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{px}{2}, & 0\leqslant x<\dfrac{l}{2}, \\ \dfrac{p(l-x)}{2}, & \dfrac{l}{2}\leqslant x\leqslant l \end{cases}$$

展成正弦级数。

解 $f(x)$是定义在$[0,\ l]$上的函数，并满足狄氏条件。为了将它展成正弦级数，先对$f(x)$进行奇式延拓（图11－14）。根据收敛定理，$f(x)$的傅立叶级数在$[0,\ l]$上收敛

于 $f(x)$。

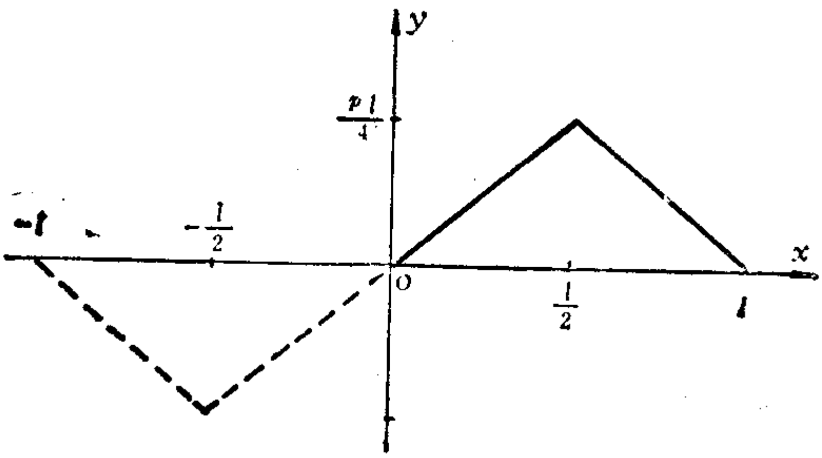


图 11—14

由奇函数的傅立叶系数计算公式，有

$$a_n = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots);$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$= \frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{px}{2}\sin\frac{n\pi x}{l}dx + \int_{\frac{l}{2}}^{l} \frac{p(l-x)}{2}\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right],$$

对于上式右边第二个积分，令$t = l - x$，则

$$b_n = \frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{px}{2}\sin\frac{n\pi x}{l}dx + \int_{\frac{l}{2}}^{0}\frac{pt}{2}\sin\frac{n\pi(l-t)}{l}(-dt)\right]$$

$$= \frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{px}{2}\sin\frac{n\pi x}{l}dx + \int_0^{\frac{l}{2}}\frac{pt}{2}\sin\left(n\pi - \frac{n\pi t}{l}\right)dt\right]$$

$$= \frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{px}{2}\sin\frac{n\pi x}{l}dx + (-1)^{n+1}\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{pt}{2}\sin\frac{n\pi t}{l}dt\right]$$

当$n=2, 4, 6, \cdots$时，$b_n=0$；

当$n=1, 3, 5, \cdots$时，$b_n=\dfrac{2p}{l}\displaystyle\int_0^{\frac{l}{2}} x\sin\frac{n\pi x}{l}dx$

$$=\frac{2pl}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2},$$

所以 $f(x)$的傅立叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{2pl}{\pi^2}\left(\sin\frac{\pi x}{l}-\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi x}{l}+\frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi x}{l}-\cdots\right)\quad(0\leqslant x\leqslant l).$$

*习　题　11—5

1.下列函数$f(x)$的周期为2π，在$(-\pi, \pi)$上的表达式如下，试把各函数展开成傅立叶级数：

(1) $f(x)=|x|\quad(-\pi\leqslant x<\pi)$；

(2) $f(x)=e^{2x}\quad(-\pi\leqslant x<\pi)$，

(3) $f(x)=\sin 2x\quad(-\pi\leqslant x<\pi)$；

(4) $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\leqslant x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1+x, & 0<x<\pi.\end{cases}$

2.把下列函数展开成傅立叶级数：

(1) $f(x)=2\sin\dfrac{x}{3}\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$，

(2) $f(x)=\begin{cases}e^x, & -\pi\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$

3．把函数 $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成正弦级数；

4．把函数 $f(x)=\begin{cases}-5, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 2x^2, & \frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi\end{cases}$ 展开成余弦级数．

5．设周期函数 $f(x)$ 在一个周期内的表达式如下，试把 $f(x)$ 展成傅立叶级数．

（1）$f(x)=\begin{cases}x, & -1\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<\frac{1}{2},\\ -1, & \frac{1}{2}\leqslant x<1;\end{cases}$

（2）$f(x)=\begin{cases}2x+1, & -3\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<3.\end{cases}$

6．把下列每个函数分别展开成正弦级数和余弦级数：

（1）$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<\frac{l}{2},\\ l-x, & \frac{l}{2}\leqslant x\leqslant l;\end{cases}$

（2）$f(x)=x^2$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$．

复 习 题 十 一

1．下述结论是否正确？若不正确，应如何改正？

（1）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$，且部分和 s_n、s_{2n}、s_{2n-1} 有同一极限；

（2）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$，且 $s_n\to\infty$ $(n\to\infty)$；

(3) 若当 n 足够大时有 $|u_{n+1}|>|u_n|$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散；

(4) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

2. 判别下述正项级数的敛散性：

(1) $\frac{1}{a}+\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{3a+2b}+\cdots+\frac{1}{na+(n-1)b}+\cdots$
($a>0$, $b>0$)；

(2) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{2\cdot 3^2}}+\frac{9}{\sqrt{3\cdot 3^3}}+\frac{13}{\sqrt{4\cdot 3^4}}+\cdots$；

(3) $0.001+\sqrt{0.001}+\sqrt[3]{0.001}+\cdots$；

(4) $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{10\cdot n}+\cdots$；

(5) $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9}+\cdots+\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}+\cdots$；

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$.

3. 判别下列级数是否收敛？若收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

(1) $\frac{\ln 2}{2}-\frac{\ln^2 2}{2^2}+\frac{\ln^3 2}{2^3}-\cdots$；

(2) $\frac{1}{2}-\frac{8}{4}+\frac{27}{8}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n^3}{2^n}+\cdots$；

(3) $\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{2\pi}{6}+\sin\frac{3\pi}{6}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{6}+\cdots$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$ ($p>0$)；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n-\ln n}$.

4. 下述结论是否正确？为什么？

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 发散；

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 也收敛；

(3) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 也收敛。

5. 求下列幂级数的收敛域：

(1) $\frac{x}{1\cdot 3}+\frac{x^2}{2\cdot 3^2}+\frac{x^3}{3\cdot 3^3}+\cdots$；

(2) $x-\frac{x^2}{5\sqrt{2}}+\frac{x^3}{5^2\cdot\sqrt{3}}-\frac{x^4}{5^3\cdot\sqrt{4}}+\cdots$；

(3) $\frac{2x-3}{1}-\frac{(2x-3)^2}{3}+\frac{(2x-3)^3}{5}-\cdots$；

(4) $1-4x+7x^2-10x^3+\cdots$.

6. 求 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}dx$ 的近似值，精确到 10^{-3}.

*7. 设函数 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $(-\pi, \pi)$ 内的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x<0,\\ x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ \pi-x, & \frac{\pi}{2}<x<\pi.\end{cases}$$

把 $f(x)$ 展开成傅立叶级数.

*8. 一个周期为 $2l$ 的锯齿波，在一个周期内的表达式是

$$f(x)=\frac{A}{l}x \qquad (-l<x\leqslant l).$$

画出它的波形，并求出它的傅立叶级数.

*9．写出右图中所示的周期为T的三角波在$\left[0, \frac{T}{2}\right]$内的函数表示式$u(t)$，将它展开成余弦级数，并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$之值．

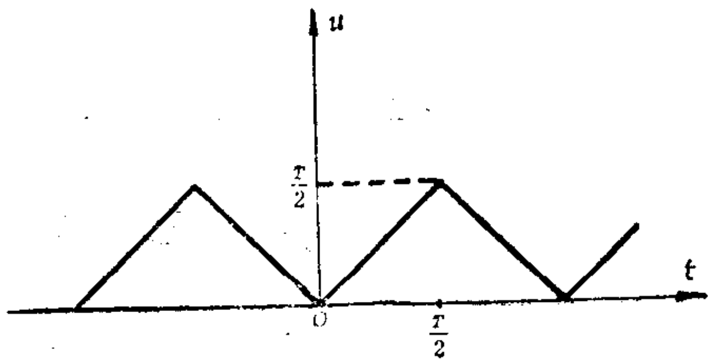


图 11—15

习 题 答 案

第 七 章

习 题 7—1

1. (1) (3, 1, −2), (−3, 1, 2), (3, −1, 2);
(2, −1, −3), (−2, −1, 3), (2, 1, 3);
(2) (3, −1, −2), (−3, 1, −2), (−3, −1, 2);
(2, 1, −3), (−2, −1, −3), (−2, 1, 3,);
(3) (−3, −1, −2); (−2, 1, −3).

2. $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$, $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$, $\left(0, \frac{a}{\sqrt{2}}, 0\right)$,
$\left(0, -\frac{a}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, 0, a\right)$, $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, 0, a\right)$,
$\left(0, \frac{a}{\sqrt{2}}, a\right)$, $\left(0, -\frac{a}{\sqrt{2}}, a\right)$.

3. $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$, $\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b})$,
$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$, $\overrightarrow{MD}=-\frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b})$.

4. (1) $\{16, 0, -20\}$; (2) $\{3\mathbf{m}+2\mathbf{n}, 5\mathbf{m}+2\mathbf{n}, -\mathbf{m}+2\mathbf{n}\}$

5. $\{-2, -\frac{11}{2}, \frac{7}{2}\}$

习 题 7—2

1. (1) −1; (2) 15. 2. (1) −6; (2) 9; (3) 13; (4) 37.

3. $\angle B=\frac{\pi}{4}$. 4. $2x+2y+3z-7=0$

5．$|\mathbf{a}|=\sqrt{m^2+9+(n-1)^2}$，$|\mathbf{b}|=\sqrt{18+l^2}$

$\mathbf{a}$ 的方向余弦为：$\dfrac{m}{|\mathbf{a}|}$，$\dfrac{3}{|\mathbf{a}|}$，$\dfrac{n-1}{|\mathbf{a}|}$；

$\mathbf{b}$的方向余弦为：$\dfrac{3}{|\mathbf{b}|}$，$\dfrac{l}{|\mathbf{b}|}$，$\dfrac{3}{|\mathbf{b}|}$.

$m=3$，$n=4$，$l=3$ 时 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$.

6．(1) $\gamma=\dfrac{\pi}{4}$或$\dfrac{3\pi}{4}$；　(2) $\gamma=\dfrac{\pi}{3}$或$\dfrac{2\pi}{3}$.

7．(1) $-\mathbf{i}+3\mathbf{j}+5\mathbf{k}$；　(2) $2\mathbf{i}-6\mathbf{j}-10\mathbf{k}$.

8．$\mathbf{a}=\pm(6\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\sqrt{15}\mathbf{k})$.

9．$\pm\dfrac{1}{\sqrt{17}}(3\mathbf{i}-2\mathbf{j}-2\mathbf{k})$.　10．$\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$.

习　题　7—3

1．$2x-2y+z-35=0$.

2．(1) 平面过原点；(2) 平面过 z 轴；(3) 平面垂直于 z 轴；(4) 平面与三坐标轴的截距都是1.

3．(1) $x+3y=0$；　(2) $x-y-4=0$.

4．$x+2y+2z-2=0$.

5．$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{6}-\dfrac{z}{3}=1$，截距分别是2，6，$-3$.

6．$z-y-1=0$.　7．$x-y+2z+2=0$.

8．$x-y=0$.

习　题　7—4

1．(1) $\dfrac{x-1}{2}=y+2=\dfrac{z-3}{5}$；(2) $x-3=\dfrac{y-4}{\sqrt{2}}=\dfrac{z+4}{-1}$；

(3) $x-3=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z+1}{3}$；(4) $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-2}{1}$；

2. (1) $\frac{x}{4}=y-4=\frac{z+1}{-3}$; (2) $\frac{x+5}{2}=\frac{y-7}{6}=z$.

3. $\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-4}{2}$. 4. $\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{3}=z-4$.

5. $x-3=y+3=\frac{z-5}{-3}$.

习 题 7—5

1. (1) 球面; (2) 旋转椭球面; (3) 旋转抛物面; (4) 母线平行于 z 轴的椭圆柱面; (5) 母线平行于 z 轴的圆柱面; (6) 两平行平面 $x=1$, $x=-1$; (7) 原点 (0, 0, 0); (8) 两相交平面 $x-y=0$, $x+y=0$.

2. $x^2+(y+2)^2+z^2=20$. 3. $4x+4y+10z-63=0$.

4. $y^2+z^2-4y=0$.

5. 旋转椭球面 $9x^2+4y^2+9z^2=36$.

6. 旋转抛物面 $y^2+z^2=5x$. 7. $x^2+z^2=m^2y^2$.

习 题 7—6

1. (1) 一条平行于 y 轴的直线; 一个平行于 yz 面的平面.
   (2) 一条直线; 一个平行于 z 轴的平面.
   (3) 圆心在原点的圆; 母线平行于 z 轴的圆柱面.
   (4) 双曲线; 母线平行于 z 轴的双曲柱面.
   (5) xy 面上一点 (−5, −13); 一条平行于 z 轴的直线.
   (6) 直线与椭圆的切点 (0, 3); 椭圆柱面与平面 $y=3$ 的交线.

2. (1) 椭圆 $\begin{cases} y^2+4z^2=16, \\ x=0; \end{cases}$ 椭圆 $\begin{cases} x^2+16z^2=64, \\ y=0; \end{cases}$

椭圆 $\begin{cases} x^2+4y^2=64, \\ z=0. \end{cases}$

(2) 双曲线$\begin{cases} y^2-4z^2=16, \\ x=0; \end{cases}$ 双曲线$\begin{cases} x^2-16z^2=64, \\ y=0; \end{cases}$

椭圆$\begin{cases} x^2+4y^2=64, \\ z=0. \end{cases}$

(3) 抛物线$\begin{cases} 9y^2=10z, \\ x=0; \end{cases}$ 抛物线$\begin{cases} x^2=10z, \\ y=0; \end{cases}$

原点(0, 0, 0).

(4) 相交直线$\begin{cases} 2y\pm 4z=0, \\ x=0; \end{cases}$ 相交直线$\begin{cases} x\pm 4z=0. \\ y=0; \end{cases}$

原点(0, 0, 0).

3. 椭圆$\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y+1)^2}{1}=1, \\ z=0. \end{cases}$

4. 圆$\begin{cases} (x-\dfrac{1}{2})^2+y^2=\dfrac{5}{4}, \\ z=0. \end{cases}$

5. 椭圆$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\frac{1}{2}}+\dfrac{(y-\frac{1}{2})^2}{\frac{1}{4}}=1, \\ z=0. \end{cases}$

习 题 7—7

1. (1)椭球面; (2)单叶旋转双曲面, 由$\begin{cases} x^2-\dfrac{y^2}{4}=1, \\ z=0 \end{cases}$ 绕y轴旋转而得, (3) 椭圆抛物面; (4) 旋转抛物面, 由$\begin{cases} x^2=4z, \\ y=0 \end{cases}$ 绕z轴旋转而得; (5) 双叶双曲面; (6) 双叶旋转双曲面, 由$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{z^2}{16}=-1, \\ y=0 \end{cases}$ 绕z轴旋转而得; (7) 双叶旋转双曲面, 由$\begin{cases} x^2-y^2=1, \\ z=0 \end{cases}$ 绕x轴旋转

而得；(8) 单叶双曲面.

2．(1) 双曲线$\begin{cases}\dfrac{z^2}{4}-\dfrac{y^2}{25}=\dfrac{5}{9},\\ x=2;\end{cases}$ (2) 椭圆$\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1,\\ y=0;\end{cases}$

(3) 椭圆$\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=2,\\ y=5;\end{cases}$ (4) 两条直线$\begin{cases}\dfrac{x}{3}\pm\dfrac{y}{5}=0,\\ z=2;\end{cases}$

(5) 双曲线$\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{25}=\dfrac{3}{4},\\ z=1.\end{cases}$

3．交线$\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{5}=1,\\ x-2z+3=0;\end{cases}$

投影柱面$x^2+20y^2-24x-116=0$是椭圆柱面.

复 习 题 七

1．(0, 1, −2)． 2．$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$，$\beta=\dfrac{\pi}{4}$，$\gamma=\dfrac{\pi}{3}$.

3．$\{\dfrac{6}{11}, \dfrac{7}{11}, -\dfrac{6}{11}\}$，和$\{-\dfrac{6}{11}, -\dfrac{7}{11}, \dfrac{6}{11}\}$.

4．(18, 17, −17)．

5．$\angle A=76°22'$；$\angle B=79°2'$；$\angle C=24°36'$.

6．(1) $-\mathbf{j}-\mathbf{k}$；(2) 2. 7．$2x-y-3z=0$.

8．$y-2=0$. 9．$y+2z=0$. 10．$-\dfrac{2\sqrt{2}}{27}$.

13．(1) 旋转椭球面$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{6}=1$；

(2) 双叶旋转双曲面$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{4}=1$；

(3) 旋转抛物面$x^2+y^2=5z$； (4) 球面$x^2+y^2+z^2=9$；

(5) 圆锥面$y^2=k^2(x^2+z^2)$.

14. 椭圆$\begin{cases}\dfrac{(x-\frac{1}{2})^2}{\frac{17}{4}}+\dfrac{y^2}{\frac{17}{2}}=1,\\ z=0.\end{cases}$　　15. 直线$\begin{cases}y-z=-2,\\ x=0.\end{cases}$

16. $\begin{cases}x^2+y^2=a^2,\\ z=0;\end{cases}$ $\begin{cases}z=k\arcsin\dfrac{y}{a},\\ x=0;\end{cases}$ $\begin{cases}z=k\arccos\dfrac{x}{a},\\ y=0.\end{cases}$

17. (1, 2, 3), (2, −1, −4).

第　八　章

习　题　8—1

1. (1) 开区域；　(2) 闭区域；　(3) 开区域；　(4) 闭区域；
(5) 开区域.

2. (1) D：$x\geqslant 0$，$x^2+y^2\neq 0$；(2) D：$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$；
(3) D：$x+y<0$；(4) D：$-1\leqslant x\leqslant 1$；$|y|\geqslant 1$；
(5) D：$-1\leqslant x-y\leqslant 1$；　(6) D：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1$；
(7) D：$r^2\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$.

3. $t^2f(x, y)$.

5. $f(x)=x^2+x$，$z=(x+y)^2+2x$.

习　题　8—2

1. (1) $\dfrac{\pi}{2}$；　(2) 1.　　　2. (1) 不存在；(2) 不存在.

3. 在$x^2+y^2-1=0$上间断.

习　题　8—3 (1)

1. −1, 0.

2. (1) $-\frac{2x\sin x^2}{y}$, $-\frac{\cos x^2}{y^2}$;

(2) $\frac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}}$, $\frac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}}$;

(3) $\frac{y(R^2-2x^2-y^2)}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$, $\frac{x(R^2-x^2-2y^2)}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$;

(4) $(1+xy)^{x+y}\left[\ln(1+xy)+\frac{y(x+y)}{1+xy}\right]$,

$(1+xy)^{x+y}\left[\ln(1+xy)+\frac{x(x+y)}{1+xy}\right]$;

(5) $\frac{|y|}{x^2+y^2}$, $-\frac{x|y|}{y(x^2+y^2)}$.

3. $f_x(x,1)=1$, $f_x(0,1)=1$, $f_y(0,1)=1$.

5. $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=z$. 6. $\frac{\pi}{4}$.

7. $f_x(x, y)=2x\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-y$,

$f_y(x, y)=x-2y\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$,

$f_{xx}(x, y)=2\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\frac{xy}{x^2+y^2}\right)$,

$f_{xy}(x, y)=f_{yx}(x, y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$,

$f_{yy}(x, y)=-2\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}-\frac{xy}{x^2+y^2}\right)$.

习　题　8—3 (2)

1. (1) $\frac{1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy$;　(2) $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$;

(3) $\frac{1}{1+x^2y^2}(ydx+xdy)$;

(4) $\frac{2}{x^2+y^2+z^2}(xdx+ydy+zdz)$;

(5) $yzx^{zy-1}dx+zx^{yz}\ln x dy+yx^{yz}\ln x dz$.

2. -0.125.　　**3**. $-0.028m$, $-0.14m^2$.

习　题　8—4 (1)

1. (1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(x^2-y^2)y\sin\frac{y}{x}-2x^3\cos\frac{y}{x}}{x^2(x^2-y^2)^2}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(y^2-x^2)\sin\frac{y}{x}+2xy\cos\frac{y}{x}}{x(x^2-y^2)^2}$;

(2) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2+2xy}{1+(2x-y^2+x^2y)^2}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2-2y}{1+(2x-y^2+x^2y)^2}$;

(3) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{e^{uv}}{x^2+y^2}(vx-uy)$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{e^{uv}}{x^2+y^2}(vy+ux)$;

(4) $\frac{\partial z}{\partial x}=-12x+5y$, $\frac{\partial z}{\partial y}=5x-2y$;

(5) $\frac{\partial z}{\partial x}=af_1'(ax, by)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=bf_2'(ax, by)$;

(6) $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\cdot f'(x^2-y^2)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-2y\cdot f'(x^2-y^2)$.

2. $\frac{dz}{dt}=\frac{-3+12t^2}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}$.

3. $\frac{du}{dt}=2e^t\sin t$.

4. $\left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_{(2, 0)}=30$, $\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{(2, 0)}=15$.

5. $\frac{\partial u}{\partial x}=(\frac{\partial u}{\partial x})+\frac{\partial u}{\partial v}\cdot\frac{1}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial v}$,

其中$v=\frac{x}{y}$.　　**7**. x.

习 题 8—4（2）

1．$\frac{dx}{dy}=0$.

2．(1) $\frac{\partial z}{\partial x}=-1$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-1$;

(2) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x+1}{z+1}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y+1}{z+1}$;

(3) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x+z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{y(x+z)}$

(4) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x(z-1)}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y(z-1)}$.

5．$dz=-\frac{z}{x}dx+\frac{(2xyz-1)z}{(2xz-2xyz+1)y}dy$.

习 题 8—5（1）

1．切线方程：$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{2}$,

法平面方程： $2x+y+2z-5=0$.

2．切平面方程：$x+y+\sqrt{2}z=2$,

法线方程：$\frac{x-\frac{1}{2}}{1}=\frac{y-\frac{1}{2}}{1}=\frac{z-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}$.

3．切平面方程：

$$\sqrt{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{6}\left(y-\frac{2\pi}{3}\right)+4\left(z+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0,$$

法线方程：$\frac{x-\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}}=\frac{y-\frac{2}{3}\pi}{-\sqrt{6}}=\frac{z+\frac{\sqrt{2}}{4}}{4}$.

4．切平面方程：$x+4y+6z+21=0$,

$x+4y+6z-21=0$.

5．(1) $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\{x(1+3x^2+3y^2),\ y(1+3x^2+3y^2),$

$-\sqrt{x^2+y^2}\}$；

(2) $-[(1+3x^2+3y^2)^2+1]^{-\frac{1}{2}}$。

习 题 8—5 (2)

1．(1) $(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2})$，$(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})$为极大值点，

$(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})$，$(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2})$为极小值点；

(2) $(0,\ 2n\pi-\frac{\pi}{2})$为极小值点($n$为整数)。

2．(1) 极小值$f(a,\ a)=6a^4$，$f(-a,\ -a)=6a^4$；

(2) 极大值$f(1,\ -1)=6$，极小值$f(1,\ -1)=-2$。

3．当长、宽都是$\sqrt[3]{2k}$，高为$\frac{1}{2}\sqrt[3]{2k}$时，表面积最小。

4．两边折起8厘米，角度$\alpha=60°$时面积最大。

5．100单位，25单位。

6．$\frac{a}{\sqrt{3}}$，$\frac{b}{\sqrt{3}}$，$\frac{c}{\sqrt{3}}$。

复 习 题 八

1．$\begin{cases}0<y<2,\\2y<x<2y+2.\end{cases}$

2．$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1,\\x^2\leqslant y\leqslant\sqrt{x}.\end{cases}$

3．(1) $|y|\leqslant|x|$，$x\neq 0$；

(2) $(x-\frac{1}{2})^2+y^2\geqslant\frac{1}{4}$且$(x-1)^2+y^2<1$；

(3) $2k\pi\leqslant x^2+y^2\leqslant(2k+1)\pi$，$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$。

4．$f(t)=t^2+2t$，　$z=\sqrt{y}+(x-1)$。

5. (1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+y^2}$;

(2) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2}{y}\csc\frac{2x}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2x}{y^2}\csc\frac{2x}{y}$,

(3) $\frac{\partial u}{\partial x}=yz(xy)^{z-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=xz(xy)^{z-1}$,

$\frac{\partial u}{\partial z}=(xy)^{z-1}\ln(xy)$;

(4) $\frac{\partial u}{\partial x}=yz^{xy}\cdot\ln z$, $\frac{\partial u}{\partial y}=xz^{xy}\cdot\ln z$,

$\frac{\partial u}{\partial z}=xy\cdot z^{xy-1}$.

8. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{y^2}\ln(3x-2y)+\frac{3x^2}{(3x-2y)y^2}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2x^2}{y^3}\ln(3x-2y)-\frac{2x^2}{(3x-2y)y^2}$.

9. $\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{2}{r+s}$.

10. $\frac{du}{dx}=\frac{e^{ax}(\sin x+a\cos x)}{a^2-1}$.

11. $\frac{du}{dt}=f_x+\frac{1}{t}f_y+\sec^2 t\cdot f_z$.

12. (1) $dz=\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\left(dx-\frac{x}{y}dy\right)$;

(2) $\frac{dz}{dt}=\frac{1}{2t}\cos\left(\frac{\ln t}{2t}\right)\left(\frac{1}{t}-\frac{\ln t}{t}\right)$.

14. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z\ln z}{x(\ln z-1)}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-z^2}{xy(\ln z-1)}$.

17. 切平面方程： $z-2\mathrm{arctg}\frac{b}{a}$

$$=\frac{-2b}{a^2+b^2}(x-a)+\frac{2a}{a^2+b^2}(y-b),$$

法线方程： $\frac{x-a}{2b}=\frac{y-b}{-2a}=\frac{z-2\mathrm{arctg}\frac{b}{a}}{a^2+b^2}$.

18．最低点（1，1，－5）．

19．极小值$2\sqrt{2}$，极大值$-2\sqrt{2}$．

20．$x=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)$，　　$y=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$．

22．矩形的长与宽分别为$\frac{1}{3}p$，$\frac{2}{3}p$．

第　九　章

习　题　9—1

1．$Q=\iint\limits_D \mu(x,y)d\sigma$，　　2．$I_1=4I_2$．

习　题　9—2

1．(1) $\frac{40}{3}$，　(2) $\ln\frac{4}{3}$，(3) 1．

2．(1) $\frac{20}{3}$；　(2) $\frac{17}{6}$．

3．(1) $\int_0^4 dx\int_x^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy$，　$\int_0^4 dy\int_{\frac{y^2}{4}}^{y} f(x,y)dx$；

(2) $\int_{-a}^{a} dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy$，

$\int_0^a dy\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx$；

(3) $\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x} f(x,y)dy$，

$\int_{\frac{1}{2}}^{1} dy\int_{\frac{1}{y}}^{2} f(x,y)\,dx+\int_1^2 dy\int_y^2 f(x,y)dx$．

4. (1) $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x, y)dy$; (2) $\int_0^1 dy \int_{e^y}^{e} f(x, y)dx$;

(3) $\int_0^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{3-x} f(x, y)dy$.

5. (1) $\frac{6}{55}$; (2) $\frac{64}{15}$; (3) $e^2-\frac{3}{2}$; (4) $\pi^2-\frac{40}{9}$;

(5) $\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

6. (1) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr$;

(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr$;

(3) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr$;

7. (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr$;

(2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_0^{\frac{2}{\cos\theta}} f(r^2) r\,dr$.

8. (1) $(e^4-1)\pi$; (2) $\frac{\pi}{4}(2\ln2-1)$;

(3) $\frac{3\pi^2}{64}$; (4) 2π.

9. (1) $\frac{3}{4}\pi a^4$; (2) $\frac{1}{8}\pi a^4$.

10. (1) $\frac{9}{4}$; (2) $\frac{1}{8}\pi a^4$; (3) $\frac{2}{3}\pi(b^3-a^3)$;

(4) $-6\pi^2$; (5) $\frac{22}{3}a^4$.

11. (1) $\frac{2}{3}a^2$; (2) $\frac{4}{3}a^3$.

12. (1) $a^2\ln 2$; (2) $4a^2$; (3) $2a^2$.

习 题 9—3

1. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$. 2. $\sqrt{2}\pi$. 3. $\frac{1}{2}\pi a^2$.

4. $\frac{7}{2}$. 5. $\frac{1}{6}$. 6. $\frac{8}{9}\pi$. 7. $\frac{1}{3}$. 8. $\frac{\pi^5}{40}$.

9. $\left(\frac{35}{48}, \frac{35}{54}\right)$. 10. $\left(\frac{3x_0}{5}, \frac{3y_0}{8}\right)$.

11. (1) $\left(1, \frac{7}{5}\right)$; (2) $\left(\frac{5}{6}a, 0\right)$. 12. $\frac{\sqrt{6}}{3}R$.

13. (1) $I_x=\frac{1}{3}ab^3$, $I_y=\frac{1}{3}a^3b$.

(2) $I_y=\frac{1}{4}\pi a^3b$, $I_O=\frac{1}{4}\pi ab(a^2+b^2)$;

(3) $I_x=\frac{72}{5}$, $I_y=\frac{96}{7}$.

14. $\frac{1}{2}k\pi(b^4-a^4)$（其中a，b分别为圆环内、外圆的半径）.

习 题 9—4

1. (1) $\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}f(x,y,z)dz$;

(2) $\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{x^2+2y^2}^{2-x^2}f(x, y, z)dz$;

(3) $\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}dy\int_{0}^{x^2+y^2}f(x, y, z)dz$.

2. (1) $\frac{1}{60}$; (2) $\frac{1}{48}$; (3) $\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right)$.

3．(1) $\frac{\pi}{2}$；(2) $\frac{16\pi}{3}$． 4．(1) $\frac{4\pi}{5}$；(2) $\frac{7}{6}\pi a^4$．

5．(1) $\frac{1}{6}\pi a^2$；(2) $\frac{1}{2}\pi R^4$．

6．(1) $\frac{1}{8}$；(2) $\frac{\pi}{15}$；(3) 8π；(4) $\frac{4\pi}{15}(A^5-a^5)$；

(5) 0．

7．(1) $\frac{32}{3}\pi$；(2) πa^3；(3) $\frac{\pi}{6}$．

8．(1) $k\pi R^4$（k 为比例 常数）；(2) $\frac{3}{2}$．

9．(1) $(0,\ 0,\ \frac{3}{4})$；(2) $(\frac{2}{5}a,\ \frac{2}{5}a,\ \frac{7}{30}a^2)$．

10．(1) $\frac{8}{3}\mu a^4$；(2) $(0,\ 0,\ \frac{7}{15}a^2)$；(3) $\frac{112}{45}\mu a^6$．

复 习 题 九

1．(1) $\int_1^3 dx\int_{\frac{1}{2}(3x+1)}^{\frac{3}{2}x+2} f(x,\ y)dy$；

(2) $\int_{-3}^{1} dx\int_{-1-\sqrt{4-(x+1)^2}}^{-1+\sqrt{4-(x+1)^2}} f(x,\ y)dy$；

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{8}} d\theta\int_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)rdr$

$+\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)rdr$；

(4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta\int_a^A f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)rdr$．

2. (1) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}dx\int_{-\sqrt{x^2-2}}^{\sqrt{x^2-2}}f(x,\ y)dy$

$+\int_{\sqrt{3}}^{2}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,\ y)dy$;

(2) $\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{x^2}f(x,\ y)dy$; (3) $\int_{0}^{a}dy\int_{-y}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx$.

3. (1) e; (2) $\frac{\pi}{4}(8\ln 2-3)$; (3) $\frac{\pi}{48}$.

4. (1)

$\int_{-\sqrt{3}-1}^{\sqrt{3}-1}dx\int_{-\sqrt{4-(x+1)^2}-1}^{\sqrt{4-(x+1)^2}-1}dy\int_{x^2+y^2}^{2(1-x-y)}f(x,y,z)dz$;

(2) $\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dz\int_{x^2+z^2}^{2-x^2-z^2}f(x,\ y,\ z)dy$.

5. (1) $\frac{1}{16}(\pi^2-8)$; (2) $\frac{\pi}{2}(2\ln 2-4+\pi)$;

(3) $\frac{8}{9}$; (4) $(2-\sqrt{2})\pi$.

6. $16\sqrt{2}\pi$. 7. $16R^2$, $\frac{16}{3}R^3$. 8. $\frac{4\sqrt{2}}{3}(2-\sqrt{3})\pi$.

9. $\frac{4}{3}$. 10. (1) $(-\frac{a}{2},\ \frac{8a}{5})$; (2) $\left(\frac{a^2+ab+b^2}{2(a+b)},\ 0\right)$.

11. $(0,0,\frac{5}{4}R)$. 12. $I_o=\frac{\pi}{4}R^4$. 13. $\frac{368}{105}$.

第　十　章

习　题　10—1

1. (1) $I_x=\int_L y^2\mu(x,\ y)ds$, $I_y=\int_L x^2\mu(x,\ y)ds$,

$I_o=\int_L(x^2+y^2)\mu(x,\ y)ds$.

(2) $\overline{x}=\dfrac{\int_L x\mu(x,\ y)ds}{\int_L \mu(x,\ y)ds}$，　$\overline{y}=\dfrac{\int_L y\mu(x,\ y)ds}{\int_L \mu(x,\ y)ds}$.

2．(1) $\sqrt{2}$；(2) $1+\sqrt{2}$；(3) $\frac{1}{12}(5\sqrt{5}+6\sqrt{2}-1)$；

(4) $\frac{1}{3p}[(p^2+y_0^2)^{\frac{3}{2}}-p^3]$；(5) $2\pi a^{2n+1}$；

(6) $2\pi^2a^3(1+2\pi^2)$；(7) $\frac{1}{3}[(2+t_0^2)^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{2}]$.

3．$\frac{a\sin\varphi}{\varphi}$.

习　题　10—2

1．(1) $-\frac{56}{15}$；　(2) 1) 1；2) 1；3) 1；　(3) $\frac{4}{5}$；

(4) -8；　(5) 32；　(6) 6；　(7) 0；　(8) -2π；

(9) $-\pi a^2$；(10) $\frac{1}{35}$.

2．$-\frac{8}{15}$.　　3．$mg(z_2-z_1)$.

习　题　10—3

1．(1) $\frac{\pi}{2}a^4$；(2) $-2\pi ab$；(3) 12.

2．(1) $\frac{5}{2}$；(2) -2；(3) 62.

* 习　题　10—4

1．(1) πa^3；(2) $4\sqrt{61}$；(3) $\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2})$；

(4) $2\pi \operatorname{arctg}\frac{H}{R}$.

2. $\frac{8}{3}\pi a^4$（a为球的半径）． 3. (1) $\frac{4}{3}\pi$; (2) 0; (3) 0.

4. (1) $\frac{2\pi}{105}R^7$; (2) 3; (3) $\frac{1}{8}$; (4) 6π.

5. $\frac{3\pi}{16}$. 6. (1) $6\pi R^3$; (2) $3a^4$; (3) 5π.

复 习 题 十

1. (1) $\frac{256}{15}a^3$; (2) $2(e^a-1)+\frac{\pi}{4}ae^a$. (3) $2a^2$;

(4) $\sqrt{a^2+b^2}\,(2a^2\pi+\frac{8}{3}b^2\pi^3)$.

2. (1) $\frac{4}{3}ab^2$; (2) 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{12}$; 3) $-\frac{1}{20}$.

(3) 2; (4) $\frac{4}{3}$; (5) 0; (6) -4π; (7) $\frac{\pi}{8\sqrt{2}}$;

(8) 13.

3. (1) 0; (2) 0. 4. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}$.

5. -12. 7. $a\mu_0$. 8. $\overline{x}=-\frac{4}{5}a$, $\overline{y}=0$.

9. (1) $\frac{1}{2}(a^2-b^2)$; (2) 0.

*10. (1) $\frac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2$; (2) $\frac{64}{15}\sqrt{2}\,a^4$.

*11. (1) 1; (2) $2\pi e^2$; (3) $hR^2(\frac{2}{3}R+\frac{\pi h}{8})$.

*12. (1) $\frac{12}{5}\pi a^5$; (2) $-\frac{\pi}{2}h^4$.

*13. $\frac{4}{3}\mu_0\pi a^4$. *14. $(0, 0, \frac{a}{2})$. *15. 0.

第 十 一 章

习 题 11—1

1. (1) $u_n=\frac{1}{2n-1}$； (2) $u_n=(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n}$；

(3) $u_n=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$； (4) $u_n=\frac{n-2}{n+1}$；

(5) $u_n=\frac{n}{n^2+1}$； (6) $u_n=\frac{x^{\frac{n}{2}}}{(2n)!!}$.

2. (1) 发散；(2) 发散；(3) 收敛；(4) 发散.

3. (1) 发散；(2) 收敛；(3) 发散；(4) 收敛；(5) 收敛.

习 题 11—2

1. (1) 发散；(2) 发散；(3) 收敛；(4) 收敛；(5) 当 $a>1$ 时收敛，当 $0<a\leqslant 1$ 时发散；(6) 发散.

2. (1) 发散；(2) 发散；(3) 收敛；(4) 收敛；(5) 收敛.

3. (1) 条件收敛；(2) 绝对收敛；(3) 条件收敛；(4) 发散；(5) 绝对收敛.

习 题 11—3

1. (1) $(-1,1)$； (2) $[-1,1]$； (3) $(-\infty,+\infty)$； (4) $[4,6)$.

2. (1) $R=\sqrt{2}$； (2) $R=+\infty$； (3) $R=\frac{1}{3}$.

3. (1) $s(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$, $-1<x<1$；

(2) $s(x)=-\ln(1-x)$, $-1\leqslant x<1$;

(3) $s(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $-1<x<1$.

习 题 11—4

1. (1) $\operatorname{sh}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $-\infty<x<+\infty$;

(2) $a^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\ln a)^n}{n!}$, $-\infty<x<+\infty$;

(3) $\sin^2x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x)^{2n}}{2\cdot(2n)!}$, $-\infty<x<+\infty$;

(4) $\ln\frac{1+x}{1-x}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $-1<x<1$;

(5) $\arcsin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\cdot(2n)!}{(n!)^2\cdot(2n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}$, $-1\leqslant x\leqslant 1$;

(6) $\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}$,

2. $\frac{1}{x^2+3x+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n$,

$-6<x<-2$.

3. $\lg x=\frac{1}{\ln 10}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}$, $0<x\leqslant 2$.

*习　题 11—5

1．(1) $f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}(-\infty<x<+\infty)$;

(2) $f(x)=\frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{\pi}\left[\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4+n^2}(2\cos nx-n\sin nx)\right]$　$(x\neq(2k+1)\pi,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$;

(3) $\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$　$(-\infty<x<+\infty)$;

(4) $f(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx+\frac{1}{n}[2+(-1)^{n+1}\cdot 2+(-1)^{n+1}\pi]\sin nx\right\}$

$(x\neq(2k+1)\pi,\ k=0;\ \pm1,\ \pm2\cdots)$.

2．(1) $2\sin\frac{x}{3}=\frac{18\sqrt{3}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{9n^2-1}\sin nx$

$(-\pi<x<\pi)$,

(2) $f(x)=\frac{1+\pi-e^{-\pi}}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2}\cos nx+\left(\frac{-n+(-1)^n n e^{-\pi}}{1+n^2}+\frac{1-(-1)^n}{n}\right)\sin nx\right]$

$(-\pi<x<\pi)$.

3．$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx$　$(0<x\leqslant\pi)$.

4. $f(x)=-\frac{5}{2}+\frac{7}{12}\pi^2+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[(-1)^n\frac{4\pi}{n^2}-\frac{2\pi}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}$

$+\left(\frac{4}{n^3}-\frac{\pi^2}{2n}-\frac{5}{n}\right)\sin\frac{n\pi}{2}\Big]\cos nx$

$\left(0\leqslant x<\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi\right).$

5. (1) $f(x)=-\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\Big(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}$

$+\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\Big)\cos n\pi x+\frac{1}{n\pi}$

$\left(1-2\cos\frac{n\pi}{2}\right)\sin n\pi x\Big]$

$\left(x\neq 2k,\ x\neq 2k+\frac{1}{2},\ k=0,\ \pm1,\pm2,\ \cdots\right);$

(2) $f(x)=-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\frac{6}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]\cos\frac{n\pi x}{3}$

$+\frac{6}{n\pi}(-1)^{n+1}\sin\frac{n\pi x}{3}\Big\}$

$(x\neq 3(2k+1),\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots).$

6. (1) $f(x)=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{l}\quad(0\leqslant x\leqslant l);$

$f(x)=\frac{l}{4}+\frac{2l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[2\cos\frac{n\pi}{2}-1-(-1)^n\right]\cos\frac{n\pi x}{l}$

$(0\leqslant x\leqslant l);$

(2) $x^2=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2[(-1)^n-1]}{n^3\pi^2}\right\}\sin\frac{n\pi x}{2},$

$(0 \leqslant x < 2)$

$$x^2=\frac{4}{3}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2} \qquad (0\leqslant x\leqslant 2).$$

复 习 题 十 一

1．(1) 正确；(2) 错误；(3) 正确；(4) 错误．

2．(1) 发散；(2) 收敛；(3) 发散；(4) 发散；(5) 收敛；
(6) 收敛．

3．(1) 绝对收敛；(2) 绝对收敛；(3)发散；
(4) $p>1$ 时绝对收敛，$0<p\leqslant 1$ 时条件收敛；
(5) 条件收敛．

4．(1) 正确；(2) 错误；(3) 错误．

5．(1) $[-3,\ 3)$；(2) $(-5,\ 5]$；(3) $(1,\ 2]$；(4) $(-1,\ 1)$．

6．≈ 0.487．

*7．$$f(x)=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n^2}\left[2\cos\frac{n\pi}{2}-1-(-1)^n\right]\cos nx+\frac{2}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin nx\right\} \quad (-\infty<x<+\infty).$$

*8．$$f(x)=\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$(x\neq(2k+1)l,\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$．

*9．$$u(t)=\frac{T}{4}+\frac{T}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos\frac{2n\pi t}{T}$$

$(-\infty<t<+\infty)$；$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$．